一种改进的变步长前后向追踪重建算法

邹 丽[1], 唐文娟[2]

(1. 南通大学 电子信息学院, 江苏 南通 226019;2. 南京邮电大学 通信与信息工程学院, 江苏 南京 210003)

摘要: 压缩感知中前后向追踪(forward-backward pursuit,FBP)算法能有效缩短重建时间, 但一旦迭代过程中前向、后向步长确定, 将导致计算时间增长, 影响重构效率. 因此, 提出一种改进的 FBP 算法, 称为变步长前后向追踪算法(variable step size forward-backward pursuit,VSSFBP). 该算法引入判决阈值和等比因子, 考虑到估计的稀疏度远小于真实稀疏度, 选择较大迭代步长, 减少迭代次数, 缩短运行时间; 同时考虑到当估计的稀疏度达到一定值时, 减小迭代步长, 减慢逼近的速度, 提高信号重构精度. 仿真结果表明:VSSFBP 算法在保证重构效果的同时, 明显缩短了重构时间. 当图像压缩比为 0.45 时, 信噪比提高了 1 dB, 峰值信噪比提高了 0.8 dB, 重构时间降低为原来 FBP 算法的 42.04%. 与同类算法相比, 在保持较高的峰值信噪比和信噪比的条件下, VSSFBP 算法消耗的时间大大缩短, 重构速度更快, 重构信号更精确.

关键词: 变步长;前后向追踪;重建算法;压缩感知;匹配追踪

中图分类号: TN911.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-2340(2014)02-0007-06

An Improved Variable Step Size Forward-Backward Pursuit Algorithm in Compressive Sensing

ZOU Li[1], TANG Wenjuan[2]

(1. School of Electronic Information, Nantong University, Nantong 226019, China;
2. College of Telecommunications and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: There is a forward-backward pursuit(FBP) algorithm in the compressed sensing(CS) which can efficiently decrease framing time. However once forward step and backward step were determined during iteration, computing time would increase and framing efficiency would be affected. In this paper, an improved variable step size forward-backward pursuit (VSSFBP) algorithm was proposed. By integrating the ideas of double thresholds and variable step size, the proposed algorithm could decrease the computation time and control the accuracy of reconstruction without knowledge about the sparsity of the signal. And because the estimated sparsity is smaller than the true sparsity, larger iteration step was chosen to reduce the number of iterations to shorting the running time. Simultaneously considering unknown sparsity, iteration step was reduced and approaching speed was slowed down to improve the accuracy of signal reconstruction. The simulation results showed that the proposed algorithm can reduce the iteration times with better reconstruction performances. When the compression ratio of the object is 0.45, this algorithm has 1 dB gain in the signal-to-noise ratio and 0.8 dB gain in the peak signal-to-noise ratio over FBP algorithm, and the reconstruction time is only 42.04% of FBP algorithm. In a word, keeping in higher PSNR and SNR, VSSFBP algorithm has greatly re-

收稿日期: 2014-04-01
基金项目: 南通市应用研究计划项目(BK2013052)
作者简介: 邹丽(1981—), 女, 讲师, 博士研究生, 主要研究方向为认知无线电、压缩感知和宽带无线通信技术. E-mail:zou.l@ntu.edu.cn

duced time-consuming and increased reconstruction speed compared with other algorithms. Simultaneously the algorithm makes reconstructed signal more precise, so the prospect of it′s application is very broad.

Key words: variable step size; forward-backward pursuit; reconstruction algorithm; compressed sensing; matching pursuit

近年来，信息技术飞速发展，人们对数字信息的需求随之增加. 2006 年，Donoho[1]在信号逼近和稀疏分解的基础上，提出了压缩感知(compressed sensing，CS)采样理论，指出只需远少于传统的奈奎斯特(Nyquist)采样定理所要求的采样数，就可精确地或近似地恢复出原始信号. 目前已在信号处理[2-3]、“鬼”成像[4]、遥感探测[5-6]、无线通信[7]、语音识别[8]等领域得到广泛应用.

压缩感知的关键是重建算法的研究，而其中贪婪算法[9-11]是求解稀疏化问题最基础的方法. 最早提出的贪婪追踪算法有 MP(matching pursuit)和 OMP(orthogonal matching pursuit)[9]，在此基础上，提出了各类演进算法，如 ROMP(regularized orthogonal matching pursuit)[10]和 StOMP(stagewise orthogonal matching pursuit)[11]，随后，在回溯思想基础上，W. Dai 和 D. Needell 等人分别提出了 SP(subspace pursuit)[12]和 CoSaMP(compressive sampling matching pursuit)[13]算法. 2008 年，T. T. Do 等[14]人提出了稀疏度自适应的SAMP(sparsity adaptive matching pursuit) 算法，可在稀疏度未知的情况下获得较好的重建性能.

2013 年，N. B. Karahanoglu 等[15]人综合了 OMP 算法和 MP 类演进算法，提出前后向追踪(forward-backward pursuit，FBP)算法. 该算法有效地减少了迭代次数，缩短了重建时间，且不需要先验稀疏度. 然而在迭代过程中，由于前向、后向步长一旦确定就固定不变，导致计算时间较长，影响了重构效率. 针对 FBP 算法中固定步长所带来的精度不够以及重构效率低问题，本文引入“大步长快速接近、小步长逐步逼近”的策略来重构信号，提出一种改进的变步长前后向追踪算法(variable step size forward-backward pursuit，VSSFBP). 通过数据仿真，分析了该算法在重构时间、信噪比和峰值信噪比等方面的性能.

1 FBP 算法基本原理

FBP 算法通过引入前向、后向步长策略来扩展信号支撑，是基于 l_0 范数最小化的贪婪追踪算法. 该算法通过前向步长快速扩充信号支撑集，通过后向步长剔除与原信号不匹配的原子，使得搜索更精确. FBP 算法基本思想是：在原子库中选择与信号结构最匹配的原子时，引入前向、后向步长策略. 第一步，先选择最大的 α(前向步长)个相关系数来扩展支撑集；第二步，通过剔除最小的 β (后向步长)个元素来缩小支撑集. 且 $\alpha > \beta$，保证每次迭代时，在支撑集中增加$(\alpha - \beta)$个原子. 经过有限次迭代，算法收敛，当残差的能量小于某个阈值时，停止迭代，从而在不需要先验稀疏度的条件下，实现信号的精确重构.

2 改进的 VSSFBP 算法

在 FBP 算法中，前向步长 α 和后向步长 β 一旦确定就固定不变，从而迭代时步长差$(\alpha - \beta)$也保持不变，这样会导致计算时间变长，从而影响重构效率. 在匹配追踪类算法的初始阶段，估计的稀疏度远小于真实稀疏度，选择较大的迭代步长，每次选入索引集的原子较多，可以减少迭代次数，缩短运行时间；同时考虑到估计的稀疏度达到一定程度时，减小迭代步长，将减慢逼近的速度，提高重构精度.

在算法的初始阶段，支撑集未达到阈值时，通过等比因子 t 的指数级增加步长差来扩展支撑集；

当超过设定阈值后，信号越来越逼近精确解，可逐渐减小步长差来优化支撑集，减少每次迭代所选入的原子. VSSFBP 算法具体实现步骤如下：

输入：$M \times N$ 维感知矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$，M 维测量向量 $\boldsymbol{y}$；

定义：前向步长 α，后向步长 β，阈值 ε，等比因子 t；

输出：x 的 K 稀疏的逼近 $\hat{x}$，误差向量 $\boldsymbol{r}$；

初始化：$\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{y}$，重构信号 $\hat{x} = 0$，索引集 $\Gamma^0 = \varnothing$，迭代次数 $n = 0$；

循环执行步骤 1)~10)：

1)计算余量 $\boldsymbol{r}$ 和感知矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的每一列的内积 $g^n = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^{n-1}$；

2)$I_\alpha = \{g^n$ 中绝对值最大的 α 个元素对应的列序号$\}$；

3)更新索引集 $\Gamma^n = \Gamma^{n-1} \cup \{I_\alpha\}$，以及原子集合 $\boldsymbol{\Phi}_{\Gamma^n} = \boldsymbol{\Phi}_{\Gamma^{n-1}} \cup \{\varphi_{I_\alpha}\}$；

4)利用最小二乘法求得近似解，$x^n = (\boldsymbol{\Phi}_{\Gamma^n}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{\Gamma^n})^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{\Gamma^n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$；

5)$I_\beta = \{x^n$ 中绝对值最小的 β 个元素对应的列序号$\}$；

6)更新索引集 $\Gamma^n = \Gamma^{n-1} \backslash \{I_\beta\}$，以及原子集合 $\boldsymbol{\Phi}_{\Gamma^n} = \boldsymbol{\Phi}_{\Gamma^{n-1}} \backslash \{\varphi_{I_\beta}\}$；

7)利用最小二乘法求得近似解，$x^n = (\boldsymbol{\Phi}_{\Gamma^n}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{\Gamma^n})^{-1}\varphi_{\Gamma^n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$；

8)更新余量，得到 $\boldsymbol{r}^n = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Phi}x^n$；

9)如果 $l_{\mathrm{length}}(\Gamma^n) < \varepsilon$，则 $\alpha = t \times \alpha$，$\beta = t \times \beta$，否则 $\alpha = t^{-1} \times \alpha$，$\beta = t^{-1} \times \beta$；

10)判断是否满足迭代停止的条件，若满足，则令 $\hat{x} = x^n$，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^n$，输出 $\hat{x}$，余量 $\boldsymbol{r}$；否则，转到步骤 1).

由于先验稀疏度 K 未知，阈值 ε 的设定关系到信号重建过程中过估计与欠采样问题. 当 ε 的选取大于真实稀疏度，带来信号过估计问题，算法性能下降；ε 选取太小，造成欠采样问题，重构效果差，无法精确重建原始信号. 等比因子 t 的设定，则会影响算法执行效率：t 太大，算法快速收敛，导致重构精度下降；t 太小，算法执行时间较长，退化为 FBP 算法，一般选取 $t = 1\sim2$.

3 数据仿真及结果分析

为了说明 VSSFBP 算法的正确性和有效性，本文通过 MATLAB R2010a 处理平台对该算法进行了数值仿真验证. 图 1 给出了 FBP 算法和 VSSFBP 算法对一维信号的恢复结果，其中原始信号 x 的长度 $N = 256$，稀疏度 $K = 23$，测量值 $\boldsymbol{y}$ 的长度 $M = 80$，测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 为 $M \times N$ 维的高斯随机矩阵.

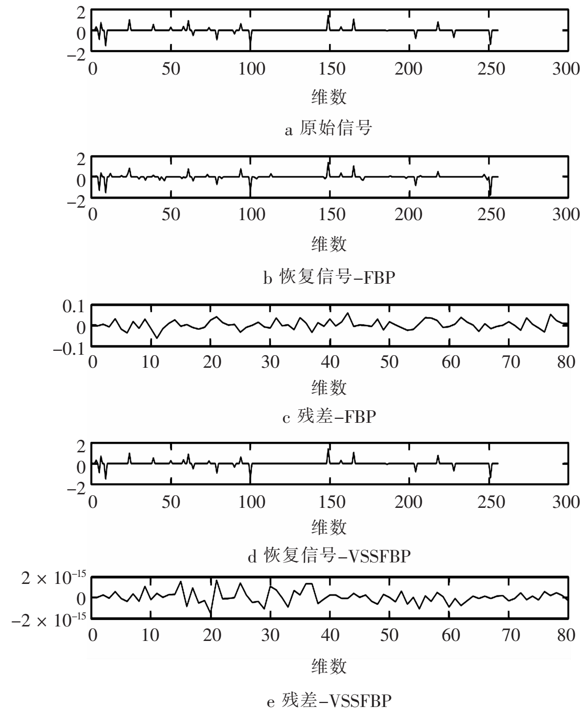


图 1 一维信号重建效果图

可以看出，在对一维信号进行重构时，2 种算法均能较好地恢复出原始稀疏信号，但 FBP 算法的重构误差区间为(−0.1，0.1)，而 VSSFBP 算法的恢复残差在(-2×10^{-15}，2×10^{-15})之间，重构更加精确.

为了进一步说明改进的 VSSFBP 算法对二维图像的重构效果，图 2 给出了 FBP 算法和 VSSFBP 算法对 256 × 256 大小的 Lena 图重建的视觉效果对比，其中压缩比为 $M/N = 128/256$，测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 为 $M \times N = 128 \times 256$ 维的高斯随机矩阵，测量值 $\boldsymbol{y}$ 的长度为 $M = 128$. FBP 算法中取前向步长和后向

步长分别设置为 $\alpha = 4$, $\beta = 1$, VSSFBP 算法中取 $\alpha = 4$, $\beta = 1$, 阈值 $\varepsilon = 48$, 等比因子 $t = 2$. 图像经小波变换进行稀疏, 先重建出图像的小波系数, 然后再用小波反变换恢复出原图像. 由图 2 看出, VSSFBP 算法比 FBP 算法恢复重建效果好, 图像清晰度明显优于 FBP 算法.

a 原始图

b FBP 算法

c VSSFBP 算法

图 2　二维 Lena 图重建效果对比图

为了更加客观比较重建算法的性能, 分别对峰值信噪比、信噪比进行数值比较, 其中峰值信噪比、信噪比的定义如下:

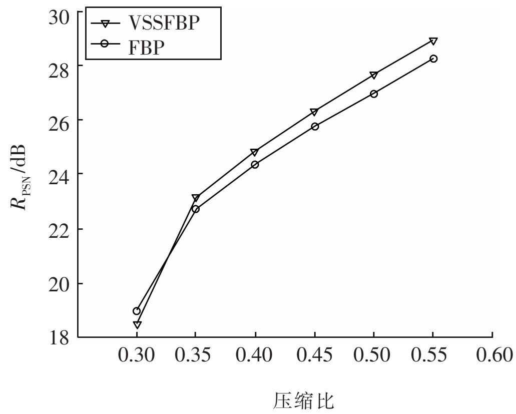
$$R_{\mathrm{PSN}} = 10\lg((2^{B} - 1)^{2}/(norm(x - \hat{x})/a/b))$$

$$R_{\mathrm{SN}} = 20\lg(norm(x)/norm(x - \hat{x}))$$

其中: $\hat{x}$为重构信号, x 为原始信号, $norm$ 为求 l_2 范数, B 为 $a \times b$ 维 Lena 图的采样点位数, 这里 $B = 8$.

通过数值仿真, 在压缩比为 $M/N = 116/256$ 时, 分别计算 2 种算法的参数值如下: VSSFBP 算法的 $R_{\mathrm{PSN}} = 26.403\ 2$ dB, $R_{\mathrm{SN}} = 30.205\ 5$ dB; FBP 算法的 $R_{\mathrm{PSN}} = 25.608\ 7$ dB, $R_{\mathrm{SN}} = 29.280\ 0$ dB. VSSFBP 算法的峰值信噪比提高了 0.8 dB, 信噪比提高了 1 dB, 均优于 FBP 算法.

图 3 分别给出了 FBP 算法和 VSSFBP 算法在不同压缩比下峰值信噪比、信噪比性能曲线. 可以看出, 相对于 FBP 算法, VSSFBP 算法在峰值信噪比、信噪比上均有一定程度的改进. 结合图 2 可知, VSSFBP 算法实现了对二维信号的精确重构, 保留了原图像较好的重建细节.



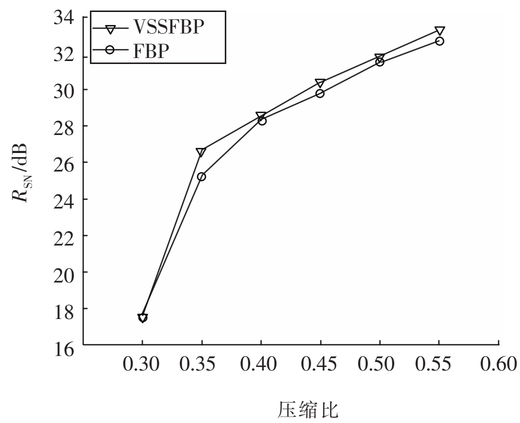
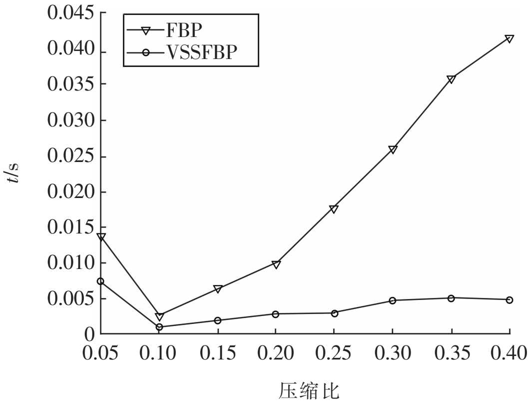
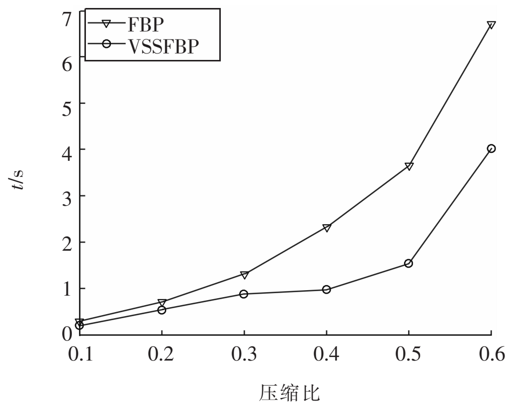


图 3　峰值信噪比 R_{PSN}、信噪比 R_{SN} 的分析曲线图

为了比较 VSSFBP 算法的重构时间, 对长度为 $N = 256$, 稀疏度为 $K = 23$ 的一维随机信号和大小为 256 × 256 的二维 Lena 图像, 在保持上述仿真条件不变的情况下进行重构, 图 4 为随着压缩比的增



a 一维信号重构时间



b 二维图像重构时间

图 4　2 种算法对一维信号和二维图像的重构时间对比图

大，FBP 算法和 VSSFBP 算法的重构时间变化曲线.

可以看出，由于改进算法中引入判决阈值 ε 和等比因子 t，在扩展支撑集时步长差 $\alpha-\beta$ 成指数级增加，使算法迭代次数减少，重构时间缩短. VSSFBP 算法对一维信号的重构时间基本保持在 0.005 s 以下，而 FBP 算法随着压缩比的增大，迭代时间逐渐增大，区间为(0.005 s，0.04 s). 在对二维 Lena 图像重建时，随着压缩比在 0.1~0.6 之间变化，FBP 算法的重构时间为 0.15~7 s，而 VSSFBP 算法为 0.1~4 s，压缩比越大，计算时间越短，改进效果越明显.

为了进一步说明 VSSFBP 算法在贪婪追踪类算法中，具有较优的重构性能，仍保持上述仿真条件不变，表 1 列出了在压缩比均为 M/N = 128/256，对 256 × 256 的 Lena 图像进行重构时，各种贪婪类追踪算法（OMP 算法、ROMP 算法、CoSaMP 算法、

表 1　贪婪追踪类算法重建性能对比

算法	峰值信噪比/dB	信噪比/dB	匹配度/%	重构时间/s
OMP	26.295 3	30.616 2	98.57	27.621 4
ROMP	24.943 4	26.383 0	94.81	1.638 7
CoSaMP	26.550 6	32.497 9	98.81	13.262 8
FBP	27.081 4	31.237 0	98.38	3.545 3
VSSFBP	27.656 8	32.020 8	98.79	1.490 5

FBP 算法和 VSSFBP 算法)在峰值信噪比、信噪比、相对误差和重构时间的数值比较. 可以看出，与同类算法相比，在保持较高的峰值信噪比和信噪比的条件下，VSSFBP 算法消耗的时间大大降低，重构速度更快.

4　结论

本文在 FBP 算法的基础上，提出了一种具有“大步长快速接近、小步长逐步逼近”思想的变步长前后向追踪算法，以改善 FBP 算法中前向步长和后向步长在迭代时固定不变、计算时间较长和重构效率低等方面的不足. 数据仿真结果表明：引入的判决阈值和等比因子可以有效控制算法迭代次数，进而缩短重建时间，提高了执行效率；在信号稀疏度未知的前提下，对信号进行精确重建，当压缩比为 0.45 时，信噪比提高了 1 dB，峰值信噪比提高了 0.8 dB，重构时间缩短到原算法的 42.04%，体现了良好的重构性能；与同类算法相比，在保持较高的峰值信噪比和信噪比的条件下，VSSFBP 算法消耗的时间大大降低，重构速度得到提升. 由于稀疏度未知，阈值选取不当容易造成信号过估计或欠采样的问题，可通过经验值进行估计.

参考文献：

[1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory，2006，52(4)：1289-1306.

[2] Ma Jianwei. Improved iterative curvelet thresholding for compressed sensing and measurement[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2011，60(1)：126-136.

[3] Yang Zai，Zhang Cishen，Deng Jun，et al. Orthonormal expansion l_1-minimization algorithms for compressed sensing

[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(12):6285-6290.

[4] 董小亮, 赵生妹, 郑宝玉. 压缩感知重构算法在“鬼”成像中的应用研究[J]. 信号处理, 2013, 29(6):677-683.

[5] Zhang Lei, Xing Mengdao, Qiu Chengwei, et al. Resolution enhancement for inversed synthetic aperture radar imaging under low SNR via improved compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2010, 48(10):3824-3838.

[6] Yang Jungang, Thompson J, Huang Xiaotao, et al. Random-frequency SAR imaging based on compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(2):983-994.

[7] Fyhn K, Jensen T L, Larsen T, et al. Compressive sensing for spread spectrum receivers[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2013, 12(5):2334-2343.

[8] 叶蕾, 杨震, 孙林慧, 等. 行阶梯观测矩阵下语音压缩感知观测序列的 Volterra+Wiener 模型研究[J]. 信号处理, 2013, 29(7):816-822.

[9] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12):4655-4666.

[10] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(3):317-334.

[11] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2):1094-1121.

[12] Dai Wei, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions of Information Theory, 2009, 55(5):2230-2249.

[13] Needell D, Tropp J A. CoSaMP:iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3):301-321.

[14] Do T T, Gan Lu, Nguyen N, et al. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing [C]// Proceedings of 2008 42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, October 26-29, 2008, Pacific Grove, CA. New York:IEEE Xplore, 2008:581-587.

[15] Karahanoglu N B, Erdogan H. Compressed sensing signal recovery via forward-backword pursuit[J]. Digital Signal Processing, 2013, 23(5):1539-1548.

(责任编辑:仇慧)