doi：10.3969/j.issn.1673-2340.2019.03.011
引文格式：聂辉，张树义，张芯语. 微分中值定理“中间点”的渐近性[J]. 南通大学学报（自然科学版），2019，18（3）：64-69.

微分中值定理“中间点”的渐近性

聂　辉，张树义*，张芯语
（渤海大学 数理学院，辽宁 锦州 121013）

摘要：为了研究区间两端点同时趋近于一定点时，柯西微分中值定理“中间点”的渐近性，利用二元函数洛必达法则建立了柯西微分中值定理“中间点”的渐近估计式。与已有文献使用的方法相比，该方法证明过程简练，所得结果新颖，并推广、改进了有关文献中的结果。

关键词：柯西微分中值定理；中间点；渐近性；二元函数洛必达法则
中图分类号：O171 **文献标志码：**A **文章编号：**1673-2340（2019）03-0064-06

Asymptotic Behavior of "Intermediate Point" for Differential Mean Value Theorem

NIE Hui，ZHANG Shuyi*，ZHANG Xinyu
(College of Mathematics and Physics，Bohai University，Jinzhou 121013，China)

Abstract: The purpose of this paper is to study the asymptotic behavior of the "intermediate point" of Cauchy differential mean value theorem when the two ends of the interval approach a certain point at the same time. By using the L'Hospital′s rule of binary function, the asymptotic estimates of the "intermediate point" of Cauchy differential mean value theorem are established. Compared with the previous studies, this paper uses the L'Hospital′s rule of binary function to study its asymptotic behavior, which makes the proof process concise. The results obtained in this paper are original, can improve and extend the corresponding results of some references.

Key words: Cauchy differential mean value theorem; intermediate point; asymptotic behavior; L'Hospital′s rule of binary function

关于在区间$[a, b]$上建立的中值定理“中间点”的渐近性，许多作者做过广泛研究，如：文献[1-13]讨论了当$b \to a$时“中间点”的渐近性与在点a的可微性；文献[14-18]讨论了当$b \to +\infty$时“中间点”的渐近性。对于当区间两端的a与b同时趋近于一定值$\eta \in [a, b]$时“中间点”的渐近性态，也有些讨论，可见文献[19-22]。而这些多数是用泰勒公式展开证明的，对于使用二元函数洛必达法则研究其渐近性尚鲜有报道。本文讨论当$a \to \eta$，$b \to \eta$时，柯西微分中值定理“中间点”的渐近性，给出了几个渐近估计式。下面引入二元函数洛必达法则、柯西微分中值定理和引理。

收稿日期：2019-06-19
基金项目：渤海大学研究生创新基金项目（YJC20170036）
第一作者简介：聂辉（1995—），女，硕士研究生。
* **通信联系人：**张树义（1960—），男，教授，主要研究方向为非线性泛函分析。E-mail: jzzhangshuyi@126.com

1 预备知识

二元函数洛必达法则[23] 设二元函数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 在邻域 $u^o(p_0, \delta)$ 可微, 满足

1) $(x-x_0)g'_x(x, y)+(y-y_0)g'_y(x, y)\neq 0$,

2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y)=0$,

3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{(x-x_0)f'_x(x, y)+(y-y_0)f'_y(x, y)}{(x-x_0)g'_x(x, y)+(y-y_0)g'_y(x, y)}=A$,

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}=A$, 其中：$A$ 为实数；$p_0=(x_0, y_0)$；$u^o(p_0, \delta)=\left\{(x, y)\,|\,0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\right\}$。

柯西微分中值定理 若函数 f 与 g 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, f 与 g 在开区间 (a, b) 内可导 $g'(x)\neq 0$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

引理 1 设 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有直至 n 阶导数, η 为 $[a, b]$ 上的固定点, $\varphi^{(i)}(\eta)=0$（$1\leqslant i\leqslant n-1$）且 $\lim\limits_{x\to\eta}\dfrac{f^{(n)}(x)}{|x-\eta|^{\alpha}}=A$, 则 $\lim\limits_{b\to\eta}\dfrac{\varphi'(b)}{(b-\eta)^{n+\alpha-1}}=\dfrac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)}$, $\lim\limits_{a\to\eta}\dfrac{\varphi'(a)}{(\eta-a)^{n+\alpha-1}}=\dfrac{(-1)^{n-1}A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)}$。

证明：连续 $n-1$ 次使用一元函数洛必达法则可证引理 1 成立。证毕。

2 主要结果

定理 1 在柯西微分中值定理条件下, 再设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有直至 n 阶导数, $f^{(i)}(\eta)=0$, $g^{(i)}(\eta)=0(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 且 $\lim\limits_{x\to\eta}\dfrac{f^{(n)}(x)}{|x-\eta|^{\alpha}}=A$, $\lim\limits_{x\to\eta}\dfrac{g^{(n)}(x)}{|x-\eta|^{\beta}}=B$。若 $\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\dfrac{\eta-a}{b-a}=K$, 则柯西微分中值定理“中间点”$\xi\in(a, b)$, 有渐近估计式

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\left|\frac{\xi-\eta}{b-\eta}\right|=\left[\frac{n+\beta}{n+\alpha}\cdot\frac{(1-K)^{n+\alpha}-(-1)^nK^{n+\alpha}}{(1-K)^{n+\beta}-(-1)^nK^{n+\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}}, \tag{1}$$

其中：极限 K, A, B 为有限实数且 A 与 B 非零；α 与 β 为实数, $\alpha>-1$, $\beta>-1$ 且 $\alpha\neq\beta$；η 为 $[a, b]$ 上的固定点；$n\geqslant 1$。

证明：作辅助函数 $\psi(a, b)=\dfrac{[f(b)-f(a)](b-a)^{\beta}}{[g(b)-g(a)](b-a)^{\alpha}}$。由二元函数洛必达法则和引理 1 有

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\psi(a, b)=\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^{n+\alpha}}\cdot\frac{(b-a)^{n+\beta}}{g(b)-g(a)}=$$

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{f'(b)(b-\eta)+f'(a)(\eta-a)}{(n+\alpha)(b-a)^{n+\alpha-1}(b-\eta)-(n+\alpha)(b-a)^{n+\alpha-1}(a-\eta)}\cdot\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{(n+\beta)(b-a)^{n+\beta-1}(b-\eta)-(n+\beta)(b-a)^{n+\beta-1}(a-\eta)}{g'(b)(b-\eta)+g'(a)(\eta-a)}=$$

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{1}{n+\alpha}\left[\frac{f'(b)}{(b-\eta)^{n+\alpha-1}}\cdot\left(\frac{b-\eta}{b-a}\right)^{n+\alpha}+\frac{f'(a)}{(\eta-a)^{n+\alpha-1}}\cdot\left(\frac{\eta-a}{b-a}\right)^{n+\alpha}\right]\cdot\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{n+\beta}{\dfrac{g'(b)}{(b-\eta)^{n+\beta-1}}\cdot\left(\dfrac{b-\eta}{b-a}\right)^{n+\beta}+\dfrac{g'(a)}{(\eta-a)^{n+\beta-1}}\cdot\left(\dfrac{\eta-a}{b-a}\right)^{n+\beta}}=$$

$$\frac{1}{n+\alpha}\left[\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{f'(b)}{(b-\eta)^{n+\alpha-1}}\cdot\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\left(\frac{b-\eta}{b-a}\right)^{n+\alpha}+\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{f'(a)}{(\eta-a)^{n+\alpha-1}}\cdot\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\left(\frac{\eta-a}{b-a}\right)^{n+\alpha}\right].$$

$$\frac{n+\beta}{\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{g'(b)}{(b-\eta)^{n+\beta-1}}\cdot\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}(\frac{b-\eta}{b-a})^{n+\beta}+\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{g'(a)}{(\eta-a)^{n+\beta-1}}\cdot\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}(\frac{\eta-a}{b-a})^{n+\beta}}=$$

$$\frac{A\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{B\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\cdot\frac{(1-K)^{n+\alpha}-(-1)^nK^{n+\alpha}}{(1-K)^{n+\beta}-(-1)^nK^{n+\beta}}。\tag{2}$$

由柯西微分中值定理和引理 1, 并注意到当$a\to\eta$，$b\to\eta$时必有$\xi\to\eta$，所以有

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\psi(a,\ b)=\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{f'(\xi)}{\left|\xi-\eta\right|^{n+\alpha-1}}\cdot\frac{\left|\xi-\eta\right|^{n+\beta-1}}{g'(\xi)}\cdot\left|\frac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\alpha-\beta}=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{f'(\xi)}{(\xi-\eta)^{n+\alpha-1}}\cdot\dfrac{(\xi-\eta)^{n+\beta-1}}{g'(\xi)}\cdot\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\alpha-\beta}, & \xi>\eta\\ \lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{f'(\xi)}{(\eta-\xi)^{n+\alpha-1}}\cdot\dfrac{(\eta-\xi)^{n+\beta-1}}{g'(\xi)}\cdot\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\alpha-\beta}, & \eta>\xi\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha)}\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(\xi-\eta)^{\alpha}}\cdot\dfrac{(\xi-\eta)^{\beta}}{g^{(n)}(\xi)}\cdot\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\alpha-\beta}, & \xi>\eta\\ \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha)}\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(\eta-\xi)^{\alpha}(-1)^{n-1}}\cdot\dfrac{(\eta-\xi)^{\beta}(-1)^{n-1}}{g^{(n)}(\xi)}\cdot\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\alpha-\beta}, & \eta>\xi\end{cases}=\frac{A\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta)}{B\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha)}\cdot\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\left|\frac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\alpha-\beta}。\tag{3}$$

由式(2)与式(3)可得到式(1)。

定理 2 在定理 1 的条件下, 若$\alpha=\beta$, 再设$\lim\limits_{x\to\eta}\dfrac{g^{(n)}(x)-(A/B)g^{(n)}(x)}{\left|x-\eta\right|^{\gamma}}=C$。若$\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{\eta-a}{b-a}=K$, 则柯西微分中值定理“中间点”$\xi\in(a,\ b)$, 有渐近估计式

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\left|\frac{\xi-\eta}{b-\eta}\right|=\left[\frac{n+\alpha}{n+\gamma}\cdot\frac{(1-K)^{n+\gamma}-(-1)^nK^{n+\gamma}}{(1-K)^{n+\alpha}-(-1)^nK^{n+\alpha}}\right]^{\frac{1}{\gamma-\alpha}},\tag{4}$$

其中：极限K, C为有限实数且C非零；γ为实数, $\gamma>-1$；η为$[a,\ b]$上的固定点；$n\geqslant 1$。

证明：作辅助函数$\psi(a,\ b)=\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}-\dfrac{A}{B}\right]\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{(b-a)^{\gamma}}$。由二元函数洛必达法则和引理 1 有

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\psi(a,\ b)=\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{f(b)-f(a)-(A/B)(g(b)-g(a))}{(b-a)^{n+\gamma}}\cdot\frac{(b-a)^{n+\alpha}}{g(b)-g(a)}=$$

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{\left[f'(b)-(A/B)g'(b)\right](b-\eta)+\left[f'(a)-(A/B)g'(a)\right](\eta-a)}{(n+\gamma)(b-a)^{n+\gamma-1}(b-\eta)-(n+\gamma)(b-a)^{n+\gamma-1}(a-\eta)}\cdot$$

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{(n+\alpha)(b-a)^{n+\alpha-1}(b-\eta)-(n+\alpha)(b-a)^{n+\alpha-1}(a-\eta)}{g'(b)(b-\eta)+g'(a)(\eta-a)}=$$

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{1}{n+\gamma}\left[\frac{f'(b)-(A/B)g'(b)}{(b-\eta)^{n+\gamma-1}}\cdot(\frac{b-\eta}{b-a})^{n+\gamma}+\frac{f'(a)-(A/B)g'(a)}{(\eta-a)^{n+\gamma-1}}\cdot(\frac{\eta-a}{b-a})^{n+\gamma}\right]\cdot$$

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{n+\alpha}{\dfrac{g'(b)}{(b-\eta)^{n+\alpha-1}}\cdot(\dfrac{b-\eta}{b-a})^{n+\alpha}+\dfrac{g'(a)}{(\eta-a)^{n+\alpha-1}}\cdot(\dfrac{\eta-a}{b-a})^{n+\alpha}}=\frac{C\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{B\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\gamma+1)}\cdot\frac{(1-K)^{n+\gamma}-(-1)^nK^{n+\gamma}}{(1-K)^{n+\alpha}-(-1)^nK^{n+\alpha}}。\tag{5}$$

由柯西微分中值定理和引理 1, 并注意到当$a\to\eta$，$b\to\eta$时必有$\xi\to\eta$，所以有

南通大学学报（自然科学版）

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\psi(a,\ b)=\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{f'(\xi)-(A/B)g'(\xi)}{|\xi-\eta|^{n+\gamma-1}}\cdot\frac{|\xi-\eta|^{n+\alpha-1}}{g'(\xi)}\cdot\left|\frac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\gamma-\alpha}=$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{f'(\xi)-(A/B)g'(\xi)}{(\xi-\eta)^{n+\gamma-1}}\cdot\dfrac{(\xi-\eta)^{n+\alpha-1}}{g'(\xi)}\cdot\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\gamma-\alpha}, & \xi>\eta\\ \lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{f'(\xi)-(A/B)g'(\xi)}{(\eta-\xi)^{n+\gamma-1}}\cdot\dfrac{(\eta-\xi)^{n+\alpha-1}}{g'(\xi)}\cdot\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\gamma-\alpha}, & \eta>\xi\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\gamma)}\dfrac{f^{(n)}(\xi)-(A/B)g^{(n)}(\xi)}{(\xi-\eta)^{\gamma}}\cdot\dfrac{(\xi-\eta)^{\alpha}}{g^{(n)}(\xi)}\cdot\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\gamma-\alpha}, & \xi>\eta\\ \lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\gamma)}\dfrac{f^{(n)}(\xi)-(A/B)g^{(n)}(\xi)}{(\eta-\xi)^{\gamma}(-1)^{n-1}}\cdot\dfrac{(\eta-\xi)^{\alpha}(-1)^{n-1}}{g^{(n)}(\xi)}\cdot\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\gamma-\alpha}, & \eta>\xi\end{cases}=$$

$$\frac{C\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha)}{B\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\gamma)}\cdot\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\left|\frac{\xi-\eta}{b-a}\right|^{\gamma-\alpha}。\tag{6}$$

由式（5）与式（6）可得到式（4）。

推论 1 在柯西微分中值定理条件下，再设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上分别具有直到 p–1 和 q–1 阶导数，在 η 点分别存在 p 和 q 阶导数，$f^{(i)}(\eta)=0(1\leqslant i\leqslant p-1)$, $g^{(i)}(\eta)=0(1\leqslant i\leqslant q-1)$ 且 $f^{(p)}(\eta)\neq 0$, $g^{(q)}(\eta)\neq 0$。若 $\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{\eta-a}{b-a}=K$，则柯西微分中值定理“中间点”$\xi\in(a,\ b)$，有渐近估计式 $\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-\eta}\right|=\left[\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{(1-K)^p-K^p}{(1-K)^q-K^q}\right]^{\frac{1}{p-q}}$，其中：极限 K 为有限实数；η 为 $[a, b]$ 上的固定点；$p, q\geqslant 1$ 且 $p\neq q$。

证明：在定理 1 中取 n=1, α=p–1, β=q–1，则有

$$\lim_{x\to\eta}\frac{f'(x)}{|x-\eta|^{p-1}}=\begin{cases}\dfrac{f^{(p)}(\eta)}{(p-1)!}, & x>\eta\\ \dfrac{f^{(p)}(\eta)}{(p-1)!(-1)^{p-1}}, & \eta>x\end{cases},\quad \lim_{x\to\eta}\frac{g'(x)}{|x-\eta|^{q-1}}=\begin{cases}\dfrac{g^{(q)}(\eta)}{(q-1)!}, & x>\eta\\ \dfrac{g^{(q)}(\eta)}{(q-1)!(-1)^{q-1}}, & \eta>x\end{cases}。$$

由定理 1 有 $\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-\eta}\right|=\left[\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{(1-K)^p-K^p}{(1-K)^q-K^q}\right]^{\frac{1}{p-q}}$。

推论 2 在推论 1 的条件下，若 $p=q$，再设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有直至 s 阶导数，且 $f^{(s)}(\eta)-\left(f^{(p)}(\eta)/g^{(p)}(\eta)\right)g^{(s)}(\eta)\neq 0$。若 $\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\dfrac{\eta-a}{b-a}=K$，则柯西中值定理“中间点”$\xi\in(a,\ b)$，有渐近估计式 $\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-\eta}\right|=\left[\dfrac{p}{s}\cdot\dfrac{(1-K)^s-K^s}{(1-K)^p-K^p}\right]^{\frac{1}{s-p}}$，其中：极限 K 为有限实数；η 为 $[a, b]$ 上的固定点；$n\geqslant 1$。

证明：在定理 2 中取 $n=1$, $\gamma=s-1$, $\alpha=p-1$，则有

$$\lim_{x\to\eta}\frac{f'(x)}{|x-\eta|^{p}}=\begin{cases}\dfrac{f^{(p)}(\eta)}{(p-1)!}, & x>\eta\\ \dfrac{f^{(p)}(\eta)}{(p-1)!(-1)^{p-1}}, & \eta>x\end{cases},\quad \lim_{x\to\eta}\frac{g'(x)}{|x-\eta|^{p}}=\begin{cases}\dfrac{g^{(p)}(\eta)}{(p-1)!}, & x>\eta\\ \dfrac{g^{(p)}(\eta)}{(p-1)!(-1)^{p-1}}, & \eta>x\end{cases},$$

南通大学学报（自然科学版）

$$\lim_{x\to\eta}\frac{f'(x)-(A/B)g'(x)}{|x-\eta|^{\gamma}}=\lim_{x\to\eta}\frac{f'(x)-(A/B)g'(x)}{|x-\eta|^{s-1}}=\begin{cases}\dfrac{f^{(s)}(\eta)-\left(f^{(p)}(\eta)/g^{(p)}(\eta)\right)g^{(s)}(\eta)}{(s-1)!}, & x>\eta\\[2ex] \dfrac{f^{(s)}(\eta)-\left(f^{(p)}(\eta)/g^{(p)}(\eta)\right)g^{(s)}(\eta)}{(s-1)!(-1)^{s-1}}, & \eta>x\end{cases}。$$

由定理 2 有$\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\left|\dfrac{\xi-\eta}{b-\eta}\right|=\left[\dfrac{p}{s}\cdot\dfrac{(1-K)^s-K^s}{(1-K)^p-K^p}\right]^{\frac{1}{s-p}}$。

在定理 1 和定理 2 中取$\eta=a$，则$K=0$，于是可得如下推论。

推论 3 在柯西微分中值定理条件下，再设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上具有直至n阶导数，$f^{(i)}(a)=0$，$g^{(i)}(a)=0(1\leqslant i\leqslant n-1)$且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n)}(x)}{(x-a)^{\alpha}}=A$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g^{(n)}(x)}{(x-a)^{\beta}}=B$，则柯西微分中值定理“中间点”$\xi\in(a,b)$，有渐近估计式$\lim\limits_{b\to a}\dfrac{\xi-a}{b-a}=\left(\dfrac{n+\beta}{n+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$，其中：极限$A$，$B$为非零有限实数；$\alpha$与$\beta$为实数，$\alpha>-1$，$\beta>-1$且$\alpha\neq\beta$；$n\geqslant1$。

推论 4 在推论 3 的条件下，若$\alpha=\beta$，再设$\lim\limits_{x\to\eta}\dfrac{g^{(n)}(x)-(A/B)g^{(n)}(x)}{(x-a)^{\gamma}}=C$，则柯西微分中值定理“中间点”$\xi\in(a,b)$，有渐近估计式$\lim\limits_{b\to a}\dfrac{\xi-a}{b-a}=\left(\dfrac{n+\alpha}{n+\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}}$，其中：极限$C$为非零有限实数；$\gamma$为实数，$\gamma>-1$；$n\geqslant1$。

注 1 推论 3 和推论 4 推广了文献[1–2]的相应结果，且条件比文献[1]弱，因为推论 3 和推论 4 不要求$f'(x)$，$g'(x)$连续。但推论 3 和推论 4 的条件比文献[2]略强，这是因为文献[2]不要求$f(x)$，$g(x)$在左端点a处可导。

例 1 在$[0,b](b>0)$上取$f(x)=x^{\frac{3}{2}}+x^2\sin x$，$g(x)=x^2$，则$A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+2x\sin x+x^2\cos x}{x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{3}{2}$，$B=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)}{x}=2$。

取$\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\beta=1$，$n=1$，则满足推论 3 的所有条件，于是由推论 3，有$\lim\limits_{b\to0}\dfrac{\xi-0}{b-0}=\left[(1+1)\Big/(1+\dfrac{1}{2})\right]^{1/(\frac{1}{2}-1)}=\dfrac{9}{16}$。

对$f(x)=x^{\frac{3}{2}}+x^2\sin x$，$g(x)=x^2$，应用柯西中值定理，存在$\xi\in(0,b)$，使

$$\frac{b^{\frac{3}{2}}+b^2\sin b}{b^2}=\frac{\frac{3}{2}\xi^{\frac{1}{2}}+2\xi\sin\xi+\xi^2\cos\xi}{2\xi}。$$

据此有$\lim\limits_{b\to0}\dfrac{\xi-0}{b-0}=\lim\limits_{b\to0}\left(\dfrac{\frac{3}{4}+\xi^{\frac{1}{2}}\sin\xi+\frac{1}{2}\xi^{\frac{3}{2}}\cos\xi}{1+b^{\frac{1}{2}}\sin b}\right)^2=\dfrac{9}{16}$。这与应用推论 3 得出的结论一致。

注 2 本文获得的结果能够移植到其他中值定理上，例如积分中值定理、广义泰勒中值定理及高阶 Cauchy 中值定理等，这值得我们作进一步讨论。

南通大学学报（自然科学版）

参考文献：

[1] 张树义. 关于中值定理“中间点”渐近性的若干注记[J]. 烟台师范学院学报（自然科学版），1994，10（2）：105–110.
[2] 张树义. 中值定理“中间点”的几个新的渐近估计式[J]. 烟台师范学院学报（自然科学版），1995，11（2）：37–40.
[3] 张树义，刘春峰，王一平，等. 中值定理“中间点”渐近性研究的新进展（I）[J]. 南都学坛，2000，20（6）：13–20.
[4] 张树义. 广义Taylor公式“中间点”一个更广泛的渐近估计式[J]. 数学的实践与认识，2004，34（11）：173–176.
[5] 聂辉，张树义. 广义Taylor中值定理中间点的渐近性[J]. 南阳师范学院学报，2019，18（3）：1–5.
[6] 万美玲，张树义. 二元函数Taylor公式“中间点”的渐近估计式[J]. 鲁东大学学报（自然科学版），2016，32（2）：117–120.
[7] 张树义，张芯语，丛培根. 泛函积分Cauchy中值定理“中间点”的渐近性[J]. 沈阳大学学报（自然科学版），2019，31（2）：150–153.
[8] 张芯语，张树义，聂辉. 泛函积分中值定理“中间点”的渐近性[J]. 烟台大学学报（自然科学与工程版），2019，32（3）：210–213.
[9] 张树义，张芯语，丛培根. 泛函高阶微分中值定理“中间点”的渐近性[J]. 杭州师范大学学报(自然科学版)，2019，18（3）：313–318.
[10] 赵美娜，张树义，郑晓迪. 广义Taylor中值定理“中间点函数”的性质[J]. 南通大学学报（自然科学版），2016，15（3）：80–85.
[11] 刘冬红，张树义，丛培根. 积分中值定理中间点函数的可微性[J]. 北华大学学报（自然科学版），2017，18（4）：434–438.
[12] 丛培根，张树义. 关于高阶Cauchy中值定理中间点函数可微性的进一步研究[J]. 南通大学学报(自然科学版)，2018，17（1）：89–94.
[13] 聂辉，张树义，张芯语. 高阶Cauchy中值定理中间点函数渐近性与可微性的再研究[J]. 轻工学报，2019，34（3）：92–102.
[14] 张芯语，张树义，郑晓迪. 高阶Cauchy中值定理“中间点”当$x\to+\infty$时的两个新的渐近估计式[J]. 南通大学学报（自然科学版），2019，18（1）：78–82.
[15] 张树义，赵美娜，郑晓迪. 积分中值定理中间点的渐近估计式[J]. 北华大学学报（自然科学版），2016，17（4）：448–454.
[16] 聂辉，张树义. 柯西中值定理“中间点”的渐近性研究[J]. 湖南城市学院学报（自然科学版），2019，28（3）：51–53.
[17] 张树义，张芯语. 广义泰勒中值定理中间点的一个渐近估计式[J]. 西南民族大学学报（自然科学版），2019，45（3）：303–307.
[18] 张树义，聂辉，丛培根. 高阶Cauchy中值定理“中间点”$x\to+\infty$时更广泛的渐近估计式[J]. 北华大学学报(自然科学版)，2019，20（1）：1–7.
[19] 刘明齐. 关于积分第二中值定理中ξ的变化趋势[J]. 工科数学，1999，15（1）：171–172.
[20] 熊维玲，张毅. 复函数中值公式中ξ的变化趋势[J]. 广西师范大学学报（自然科学版），1999，17（4）：38–44.
[21] 谢建生. 关于广义Taylor中值定理中ξ的渐近性[J]. 工科数学，1999，15（1）：168–170.
[22] 伍建华，孙霞林，熊德之. 一类积分型中值定理的渐近性讨论[J]. 西南师范大学学报（自然科学版），2012，37（8）：24–27.
[23] 陈建华，鲍幼强. L'Hospital法则的一个推广[J]. 淮北煤师院学报（自然科学版），1994，15（2）：79–81.

（责任编辑：张燕）

南通大学学报（自然科学版）