极限函数黎曼可积性注记

许 宁
(南京政治学院 基础部, 江苏 南京 210003)

摘要: 研究了光滑收敛函数序列的极限函数不可积的存在性. 运用稠密性论证、函数光滑化技术、胖康托集的构造技术, 结合函数的平移特性和黎曼可积的勒贝格准则, 获得了一列有界的光滑收敛函数序列, 其极限函数在黎曼积分意义下不可积, 并给出构造极限函数不可积的一般方法.

关键词: 极限函数; 黎曼积分; 光滑函数; 胖康托集

中图分类号: O172.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-2340(2014)03-0069-06

Remarks on the Riemann Integrability of Limit Functions

XU Ning
(Department of Foundational Courses, PLA Nanjing Institute of Politics, Nanjing 210003, China)

Abstract: The existence of the non-integrable limit of smooth function series was obtained in this study by combining dense argumentation and regularization by convolution, construction of fat Cantor-type set with functional translation and Lebesgue′s criterion for Riemann integra-bility, and the limit of some smooth functions is proved to be Riemann non-integrable. Some approaches to the construction of the Riemann non-integrable limit function are presented.

Key words: limit function; Riemann integral; smooth function; Fat Cantor set

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Riemann 可积收敛的函数列, 在实际运用中, 常常需要

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(\lim_{n\to\infty}f_n(x))\mathrm{d}x \tag{1}$$

这一公式, 众所周知, 若序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛(或在 $[a, b]$ 上等度 Riemann 可积), 则在 Riemann 积分的意义下, 式(1)成立[1]. 一般说来, 仅对收敛序列, 公式(1)可能不成立. 拿序列

$$f_n(x)=\begin{cases}2n,\ x\in[\frac{1}{2n},\ \frac{1}{n}]\\ 0,\ x\in[0,\ 1]-[\frac{1}{2n},\ \frac{1}{n}]\end{cases}\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{2}$$

来说, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, $x\in[0, 1]$. 又

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}2n\mathrm{d}x=1 \tag{3}$$

收稿日期: 2014-01-22
基金项目: 国家自然科学基金项目(11171145)
作者简介: 许宁(1965—), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为调和分析、偏微分方程、军事运筹学. E-mail: xuningnj@163.com

而

$$\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\mathrm{d}x = 0$$

公式(1)不成立. 于是有人说, 这是序列没有很好的性态造成的, 比如序列(2)不是一致有界的. 事实上, 即使是一致有界的可积序列, 公式(1)也可能不成立. Barie 函数[2-3] $B_n(x)(x\in[0,1])$ 就是一个著名的例子, 这里 $B_n(x)$ 定义为

$$B_n(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{p}{q},\ p, q \text{ 为互约的整数, 且 } q\leqslant n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $n=1, 2, \cdots$. 显然,

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x)=I_{Q\cap[0,1]}(x)$$

这里

$$I_{Q\cap[0,1]}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\text{是有理数}\\ 0, & x\in[0,1]\text{是无理数}\end{cases}$$

又

$\int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x=0$, $n=1, 2, \cdots$, $\int_0^1 I_{Q\cap[0,1]}(x)\mathrm{d}x$ 不存在[4], 于是

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} B_n(x)\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x$$

故人们会说, 上述例子中, 序列皆不连续, 如果函数序列有很好的正则性, 比如他们都是连续可导的, 就直觉而言, 可能有公式(1)成立. 本文指出, 即使光滑的函数序列, 公式(1)也不一定成立. 这就是如下的结论:

定理 1 存在[0, 1]上的非负光滑收敛的函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其极限函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 是 Riemann 不可积的.

1 主要工具

引理 1 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的有界函数, $D=\{s\in[a, b]$: 函数 $f(x)$ 在点 $x=s$ 处不连续$\}$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 $m(D)=0$, 这里 $m(D)$ 表示集合 D 的 Lebesgue 测度.

证明: 这是著名的 Riemann 可积性的 Lebesgue 准则, 证明请参考文献[5].

由引理 1, 我们可以构造一个无处稠密的集合 $A\subset[0, 1]$, 且 $m(A)>0$. 记 $I_A(x)$ 表示 A 的特征函数, 则 $I_A(x)$ 在[0, 1]上不可积. 这就是如下引理:

引理 2 存在区间[0, 1]的无处稠密子集 A, 其特征函数 $I_A(x)$ 在[0, 1]上不可积, 这里

$$I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in[0,1]-A\end{cases}$$

证明: 设开区间(0, 1)中的有理数为 $\{r_1, r_2, \cdots\}$, 令

$$S_k=(0,1)\cap\left(r_k-\frac{1}{2^{k+2}}, r_k+\frac{1}{2^{k+2}}\right),\quad k=1, 2, \cdots \tag{4}$$

置 $S=\cup_{k=1}^{\infty} S_k$, 则 $A=[0, 1]-S$ 即为所求. 事实上, 由于有理数集在区间[0, 1]中是稠密的, 于是 S 在[0, 1]中是稠密的, 又 A 是闭集, 因而 A 在[0, 1]中不稠密.

现在考察 A 的测度. 由于

$$m(S)=m(\cup_{k=1}^{\infty} S_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} m(S_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

于是

$$m(A)=m([0,1)-S)=$$
$$1-m(S)\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

对于 $x\in A$ 的任一邻域, 皆含有不是 A 中的点, 则 $I_A(x)$ 的不连续点集 D 包含 A, 故 $m(D)\geqslant m(A)>0$. 因而由引理 1, $I_A(x)$ 在[0, 1]上不可积. 证毕.

引理 3 任给 $\varepsilon>0$, 存在光滑非减函数 $g(x)$ $(x\in\mathbb{R})$, 满足: i) 当 $x\leqslant 0$ 时, $g(x)=0$; ii) 当 $x>0$ 时, $g(x)>0$; iii) 当 $x\geqslant\varepsilon$ 时, $g(x)=1$.

证明: 借助于文献[6]的思想, 令

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \tag{5}$$

显然, 当 $x\in\mathbb{R}$ 时, $f(x)\geqslant 0$, 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$.

下面考察其光滑性. 当 $x\neq 0(x\in\mathbb{R})$ 时,

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}P_n\left(\dfrac{1}{x}\right), & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad n=1, 2, \cdots \tag{6}$$

其中

$P_n(\frac{1}{x})=$

$(\frac{1}{x})^{2n}+a_1(\frac{1}{x})^{2n-1}+a_2(\frac{1}{x})^{2n-2}+\cdots+$

$a_{n-1}(\frac{1}{x})^{n+1}$, $a_i(i=1,2,\cdots,n-1)$为常数.

即当 $x\neq 0$ 时, $f(x)$是光滑的. 今考察 $x=0$ 时的情形, 由于

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-0}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}te^{-t}(令\ t=\frac{1}{x})=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0(依据洛比达法则)$$

故 $f'(0)=0$. 于是可设

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}P_n(\frac{1}{x}), & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \tag{7}$$

今考察 $n+1$ 情形, 显然

$$f_-^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=0$$

又

$$f_+^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}P_n(\frac{1}{x})-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}P_n(\frac{1}{x})=$$

$$\lim_{t\to+\infty}tP_n(t)e^{-t}(令\ t=\frac{1}{x})=\lim_{t\to+\infty}\frac{tP_n(t)}{e^t}=0$$

(依据洛比达法则及 $tP_n(t)$是 $2n+1$ 阶多项式) (8)

故由归纳法知 $f(x)$对一切 $x\in\mathbb{R}$ 是光滑的. 设

$$g(x)=\frac{f(x)}{f(x)+f(\varepsilon-x)} \tag{9}$$

其中 $\varepsilon>0$, 则 $g(x)$即为所要的函数. 事实上, 任意 $x\in\mathbb{R}$, x 及 $\varepsilon-x$ 至少有 1 个是正数, 于是 $f(x)+f(\varepsilon-x)>0$. 因而由 $f(x)$的光滑性知 $g(x)(x\in\mathbb{R})$是光滑的. 显然, 当 $x\leqslant 0$ 时, $g(x)=0$; 当 $x>0$ 时, $g(x)>0$; 当 $x\geqslant\varepsilon$ 时, $g(x)=1$. 又

$$g'(x)=\frac{f'(x)f(\varepsilon-x)+f(x)f'(\varepsilon-x)}{(f(x)+f(\varepsilon-x))^2}\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}$$

故 $g(x)$在 $\mathbb{R}$ 上是非减的. 证毕.

引理 4 设(a,b)是 $\mathbb{R}$ 中的开区间, 令 $\varepsilon>0$, 满足$(a+\varepsilon,b-\varepsilon)$是非空的, 则存在 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 $h(x)(x\in\mathbb{R})$满足 $0\leqslant h(x)\leqslant 1$, 且有: i) 当 $x\in(a,b)$时, $h(x)>0$; ii) 当 $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$时, $h(x)=1$; iii) 当 $x\notin(a,b)$时, $h(x)=0$.

证明: 任给 $\varepsilon>0$, 引理 3 指出, 存在满足引理 3 的 3 个条件的 $\mathbb{R}$ 上非减光滑函数 $g(x)$. 于是若定义 $h(x)=g(x-a)g(b-x)$, 则 $h(x)$即为所求. 事实上, 当 $x\in(a,b)$ 时, $x-a$, $b-x$ 皆为正数. 于是 $g(x-a)>0$, $g(b-x)>0$, 即 $h(x)>0$; 当 $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 时, $x-a\geqslant\varepsilon$, $b-x\geqslant\varepsilon$, 故有 $h(x)=1$; 当 $x\notin(a,b)$时, 则 $x-a$ 与 $b-x$ 至少有 1 个非正数, 故有 $h(x)=0$. 证毕.

2 定理 1 的证明

证明: 设 S_k 如式(4)所示, 于是 $S=\cup_{k=1}^{\infty}S_k$ 是$[0,1]$区间上稠密的开子集, 令 $S_k=(a_k,b_k)$, 取 $\varepsilon_k>0$ 满足$(a_k+\varepsilon_k,b_k-\varepsilon_k)$是非空的开集. 由引理 4, 存在光滑函数 $h_k(x)$满足: 1) $0\leqslant h_k(x)\leqslant 1$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $h_k(x)>0$, $x\in S_k=(a_k,b_k)$; 3) $h_k(x)=1$, $x\in[a_k+\varepsilon_k,b_k-\varepsilon_k]$; 4) $h_k(x)=0$, $x\notin S_k=(a_k,b_k)$. 运用单位分解的思想[7], 现定义

$$v_k(x)=1-h_k(x),\ x\in\mathbb{R}$$

显然 $v_k(x)$在 $\mathbb{R}$ 上是光滑的, 且满足:

$$\begin{aligned}&\text{i)}\ 0\leqslant v_k(x)\leqslant 1,\ x\in\mathbb{R};\\&\text{ii)}\ v_k(x)<1,\ x\in S_k=(a_k,b_k);\\&\text{iii)}\ v_k(x)=1,\ x\notin S_k=(a_k,b_k).\end{aligned} \tag{10}$$

若令

$$f_n(x)=(v_1(x)\cdot v_2(x)\cdots v_n(x))^n$$

则 $f_n(x)$满足定理 1 的要求. 事实上, 由于 $v_k(x)$ $(k\in\mathbb{N}^*)$是光滑的, 因而它们的乘积也是光滑的, 即 $f_n(x)$在 $\mathbb{R}$ 上是光滑的. 又由 $0\leqslant v_k(x)\leqslant 1(k\in\mathbb{N}^*)$ 知, $f_n(x)\in[0,1](x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*)$, 故由指数函数的

单调性有

$f_{n+1}(x)=(v_1(x)\cdot v_2(x)\cdot\cdots\cdot v_n(x)\cdot v_{n+1}(x))^{n+1}\leqslant$

$(v_1(x)\cdot v_2(x)\cdot\cdots\cdot v_n(x)\cdot v_{n+1}(x))^{n}\leqslant$

$(v_1(x)\cdot v_2(x)\cdot\cdots\cdot v_n(x)\cdot 1)^{n}=f_n(x)$

因而$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是单调减函数序列，故对任意$x\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$存在，其极限函数记作$f(x)$. 下面把自变量$x$限制在$[0,1]$上来考察$f(x)$的表达式. 设$A$如引理2所示，若$x\in A$，则$x\notin S_k\ (k\in\mathbb{N}^*)$，此时$v_k(x)=1(k\in\mathbb{N}^*)$. 因而有

$$f_n(x)=1,\ x\in A,\ n=1,2,\cdots$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1,\ x\in A$$

若$x\in S$，则存在某个k，$x\in S_k$. 由于$0\leqslant v_k(x)\leqslant 1$，于是对$n\geqslant k$，有

$0\leqslant f_n(x)=(v_1(x)\cdot v_2(x)\cdot\cdots\cdot v_k(x)\cdot\cdots\cdot v_n(x))^{n}\leqslant$

$(1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1\cdot v_k(x)\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1)^{n}=(v_k(x))^{n}$

由式(10)知，$x\in S_k$时，$0\leqslant v_k(x)<1$，因而有$\lim\limits_{n\to\infty}(v_k(x))^{n}=0$. 即当$x\in S$时，有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

故得

$$f(x)=I_A(x),\ x\in[0,1]$$

引理2表明，$f(x)$在$[0,1]$上不可积，于是我们得到一个光滑的收敛的函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，其极限函数不可积，即公式(1)不成立. 证毕.

3 结语

现代数学中，积分的主要工具是Lebesgue积分，这是由于对非负的Lebesgue可积函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$而言，若f_n一致有界，且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，则有

$$\int f=\lim_{n\to\infty}\int f_n$$

这里的积分是Lebesgue意义下的积分[8]. 实际应用中，函数列的一致有界性很容易检验，从而导致Lebesgue积分比Riemann积分更优越. 定理1说明，对Riemann积分的极限函数的可积性需要特别小心. 一般说来，上述构造极限函数不可积的方法是一般的方法，它的基本思想是：应用构造康托集的方法构造一个无处稠密的闭集A，且$m(A)>0$，由引理2知，集合A的特征函数I_A是非Riemann可积的，于是设法构造函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，使其极限函数为I_A. 在Riemann意义下，这样的函数列是很容易得到的.

文献[1]提出，若把式(2)中的f_n修改为连续函数，仍有这样的函数列$\{f_n\}$使公式(1)不成立. 现在我们用上述方法作一说明.

第1步，构造$[0,1]$上的不可积函数$I_C(x)$，其中C是Lebesgue测度为正的胖Cantor集. 方法与文献[9]类似. 首先在区间$[0,1]$的中点$x=\frac{1}{2}$处，去除以$\frac{1}{2}$为中心，长度为$\frac{1}{5}$的一个开区间，余下的区间记为C_1，即

$$C_1=[0,1]-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10},\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)=$$

$$\left[0,\frac{2}{5}\right]\cup\left[\frac{3}{5},1\right]$$

然后对区间$\left[0,\frac{2}{5}\right]$，$\left[\frac{3}{5},1\right]$分别去除以其中点$x=\frac{1}{5}$和$x=\frac{4}{5}$为中心，长度为$\frac{1}{5^2}$的开区间，余下的区间记为$C_2$，即

$$C_2=C_1-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2\cdot 5^2},\frac{1}{5}+\frac{1}{2\cdot 5^2}\right)\cup$$

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2\cdot 5^2},\frac{4}{5}+\frac{1}{2\cdot 5^2}\right)=$$

$$\left[0,\frac{9}{50}\right]\cup\left[\frac{11}{50},\frac{20}{50}\right]\cup\left[\frac{30}{50},\frac{39}{50}\right]\cup\left[\frac{41}{50},1\right]$$

如此对余下的小区间做上述同样的过程，直至无穷，即可得到胖Cantor集. 具体来说第k次的C_k是由对C_{k-1}中的2^{k-1}个小区间，分别去除以其对应的中点为中心，长度为5^{-k}的开区间后，余下的2^k个闭区间组成的. 胖Cantor集C是这些C_k的交集，即

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

设开区间集

$\{I_{kj}, j = 1, 2, \cdots, 2^k\}$, $m(I_{kj}) = \frac{1}{5^{k+1}}$($m(I_{kj})$表示区间 I_{kj} 的长度)是从 C_k 中挖去的 2^k 个开区间，则

$$m(C) = 1 - m([0, 1] - C) = 1 - m(\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^k} I_{kj}) =$$

$$1 - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^k} m(I_{kj}) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^k}\frac{1}{5^{k+1}} =$$

$$1 - \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{2}{3}$$

即 C 的 Lebesgue 测度大于 0. 令

$$I_C(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \in [0, 1] - C \end{cases}$$

即 $I_C(x)$为胖康托集 C 的特征函数. 由于 C 中没有内点，没有孤立点，因而对 $x \in C$ 的任一邻域，皆含有不是 C 中的点，故 $I_C(x)$的不连续点集包含 C. 由引理 1 知，$I_C(x)$在$[0, 1]$上不可积.

第 2 步，构造与集合有关的连续函数. 为此结合点集拓扑的知识[10]，引进闭集的距离函数. 设 $A \subset \mathbb{R}$ 是一非空的闭集，定义点 $x \in \mathbb{R}$ 到集合 A 的距离为

$$d(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$$

令 $f(x) = d(x, A)$，则 $f(x)$是 $\mathbb{R}$ 上的函数. 因 A 是闭的，故存在一点$y_x \in A$，使得 $d(x, A) = |x - y_x|$. 由此可知$f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 事实上，任意 $z \in \mathbb{R}$, 存在 $y_z \in A$，使得 $d(z, A) = |z - y_z|$. 依据距离定义中的最小值特征，对任意 $y \in A$，有$|z - y_z| \leqslant |z - y|$. 故对任意点 $x, z \in \mathbb{R}$，不妨设 $d(x, A) \leqslant d(z, A)$，于是由距离的最小特征及绝对值的三角不等式有

$$\begin{aligned}
&f(z) - f(x) = \\
&d(z, A) - d(x, A) = |z - y_z| - |x - y_x| \leqslant \\
&|z - y_x| - |x - y_x| \leqslant \\
&|z - x| + |x - y_x| - |x - y_x| = |z - x| \\
&f(x) - f(z) = \\
&d(x, A) - d(z, A) = |x - y_x| - |z - y_z| \leqslant \\
&|z - y_z| - |x - y_x| \leqslant \\
&|z - y_x| - |x - y_x| \leqslant \\
&|z - x| + |x - y_x| - |x - y_x| = |z - x|
\end{aligned}$$

即

$$|f(x) - f(z)| \leqslant |z - x|, \ \forall x, z \in \mathbb{R}$$

故 $f(x)$是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

第 3 步，构造以函数 $I_C(x)$为极限的连续函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. 由 C 的构造知

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$$

若定义

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nd(x, C_n), & d(x, C_n) \leqslant \frac{1}{n} \\ 0, & d(x, C_n) > \frac{1}{n} \end{cases}$$

其中，$x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \cdots$，则$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是连续函数序列，且以 $I_C(x)$为极限函数. 事实上，

$$f_n(x) = 1 - n\min\{\frac{1}{n}, d(x, C_n)\}$$

由于 $g(x) = d(x, C_n)$, $h(x) = \frac{1}{n}$皆为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，故 $f_n(x)(n \in \mathbb{N}^*)$在$[0, 1]$上是连续函数. 又当 $x \in C_n$ 时，$f_n(x) = 1$，当 $d(x, A_n) > \frac{1}{n}$时，$f_n(x) = 0$. 下面分两种情形来讨论$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$的极限性态：

情形 i, $x \in C$. 这时对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$，有 $x \in C_n$，即 $f_n(x) = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. 故有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1, \ x \in C$$

情形 ii, $x \in [0, 1] - C$. 则存在 $k \in \mathbb{N}^*$，使得 $x \notin C_k$，由于集簇$\{C_m, m \in \mathbb{N}\}$是单调递减的，且 C_k ($k \in \mathbb{N}^*$)是闭集，于是 $\alpha = d(x, C_k) > 0$，且有

$$\alpha = d(x, C_k) \leqslant d(x, C_{k+1}) \leqslant d(x, C_{k+2}) \leqslant \cdots$$

现取充分大的 $n(n > k)$满足 $\alpha > \frac{1}{n}$. 于是有 $d(x, C_n) \geqslant \alpha > \frac{1}{n}$，即$f_n(x) = 0$，故有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ x \in [0,\ 1] - C$$

综上所述, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = I_C(x),\ x \in [0,\ 1]$$

从上述分析知, 对 Riemann 可积收敛的函数列, 函数列的正则性对其极限函数的 Riemann 可积性不起任何作用, 只有极限的一致收敛性才是本质的.

参考文献:

[1] 陶哲轩. 陶哲轩实分析[M]. 王昆扬, 译. 北京:人民邮电出版社, 2008:287-313.

[2] Baire R. Sur les fonctions de variables réelles[J]. Matematica Pura ed Applicata, 1899, 3(1):1-123.

[3] Fenccios, Jonald P. On some properties of Barie 1 functions [J]. Int Journal of Math Analysis, 2013, 7(8):393-402.

[4] Goldberg R R. Methods of real analysis[M]. 2nd. John Wiley & Sons, Inc, 1976:1-10.

[5] Apostol T M. Mathematical analysis[M]. 2nd. 北京:机械工业出版社, 2004:169-173.

[6] Folland G B. Introduction to partial differential equations [M]. 2nd. Princeton New Jersey:Princeton Universisty Press, 1995:1-13.

[7] Barros-Neto, Jose. An introduction to the theory of distributions[M]. New York:Marcel Dekker, Inc, 1973:3-13.

[8] 阿黑波夫, 萨多夫尼奇, 丘巴里阔夫. 数学分析讲义[M]. 王昆杨, 译. 北京:高等教育出版社, 2006:361-363.

[9] Wheeden R L, Zygmund A. Measure and integral[M]. New York and Base:Marcel Dekker, Inc, 1977:33-47.

[10] Bartle R G. The elements of real analysis[M]. London: John Wiey & Sons, Inc, 1967:58-83.

(责任编辑:张燕)