

doi: 10.12194/j.ntu.20240523001

引文格式: 陈一帆, 李卓轩, 曹进德. 基于 FGM(1,1|sin)模型的沥青路面车辙深度预测[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2024, 23(4):17-22.

基于 FGM(1,1|sin)模型的沥青路面车辙深度预测

陈一帆^{1,3}, 李卓轩^{1,2}, 曹进德^{1,2*}

(1. 东南大学 数学学院, 江苏 南京 211189;

2. 综合交通运输理论交通运输行业重点实验室(南京现代综合交通实验室), 江苏 南京 211135;

3. 威斯康星大学麦迪逊分校 统计系, 威斯康星 麦迪逊 53706)

摘要:随着城市交通的快速发展,路面性能直接关系到交通运输的安全性和环境保护。为了对沥青路面车辙深度有效建模,构建 FGM(1,1|sin)模型,旨在提高对沥青路面车辙深度演化过程的预测精度。由于 RIOHTrack 实验中的车辙深度长期演化存在季节性回弹、数据样本少和采样周期长等问题,因此,在传统灰色模型的基础上引入正弦算子,以适应沥青路面车辙深度数据的特点。通过引入分数阶累加算子,采用时间权重,增强了模型对不同路面车辙深度数据的挖掘能力,并能更准确地描述车辙发展规律。此外,在 RIOHTrack 实验场的 19 种不同沥青路面上对该模型进行了测试,相较于其他现有算法,展现了更高的预测精度。研究对沥青路面的结构设计、材料使用和养护决策提供了有力的数据支持。

关键词:FGM(1,1|sin)模型;RIOHTrack;车辙深度;分数阶累加算子;正弦算子

中图分类号: TP18;U418.68

文献标志码: A

文章编号: 1673-2340(2024)04-0017-06

Asphalt pavement rutting depth prediction based on FGM(1, 1 | sin) model

CHEN Yifan^{1,3}, LI Zhuoxuan^{1,2}, CAO Jinde^{1,2*}

(1. School of Mathematics, Southeast University, Nanjing 211189, China;

2. Key Laboratory of Transport Industry of Comprehensive Transportation Theory
(Nanjing Modern Multimodal Transportation Laboratory), Nanjing 211135, China;

3. Department of Statistics, University of Wisconsin-Madison, Madison 53706, USA)

Abstract: With the rapid development of urban transportation, pavement performance is directly related to the safety of transportation and environmental protection. To effectively model the rutting depth of asphalt pavements this study is based on the FGM(1, 1 | sin) model, which aims to improve the prediction accuracy of the rutting disease evolution process of asphalt pavements. The model combines the fractional-order accumulation operator and the sinusoidal operator to accommodate the characteristics of asphalt pavement rutting depth data, such as long sampling periods, small data samples, and the presence of oscillations. By introducing time weights, the model enhances the ability to mine the rut depth data of different pavements and describes the rut development law more accurately. In addition, the model was tested on 19 different asphalt pavements at the RIOHTrack experimental site and demonstrated higher prediction accuracy compared to other existing algorithms, providing strong data support for structural design, material use, and maintenance decisions of asphalt pavements.

Key words: FGM(1, 1 | sin) model; RIOHTrack; rut depth; fractional order cumulant operator; sine operator

收稿日期: 2024-05-23 接受日期: 2024-11-10

基金项目: 国家重点研发计划项目(2020YFA0714300);综合交通运输理论交通运输行业重点实验室(南京现代综合交通实验室)开放课题资助项目(MTF2023004)

第一作者简介: 陈一帆(2001—), 女, 硕士研究生。

* 通信联系人: 曹进德(1963—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为复杂网络、群体智能算法、系统科学等。E-mail: jdciao@seu.edu.cn

随着交通的日益繁忙,交通载荷量增大,保障道路安全是维持交通高效运行的基石。在路面基础设施安全中,车辙病害是常见的路面病害之一,同时对道路安全、舒适度和使用寿命都有一定程度的影响,因此研究不同沥青路面的车辙深度演化过程是非常必要的。随着人工智能技术应用的发展^[1-2],采用先进的数学模型和人工智能算法对车辙深度进行建模受到国内外学者的广泛关注^[3-5]。

吕松涛等^[6]针对面向长寿命沥青路面的延寿设计进行了详细综述,强调了综合考虑车辙状态等因素来确定旧路面补强和处治对策。对车辙深度的演化建模,可以有效了解沥青路面的使用状态,为结构设计、材料使用和养护决策提供支撑。由于沥青路面的车辙深度数据存在采样周期长、数据样本少的特点,很多研究者采用灰色模型(gray model, GM)对车辙深度进行建模。灰色模型基于原始的数据进行累加计算,可以将无序的原始序列转变为一种有序的生成指数序列,被广泛应用于各类工程领域^[7-11]。张琛等^[7]提出了一种使用动态灰色模型——DGM(1,1)模型进行车辙深度预测并与传统的经验力学模型进行组合预测,进一步提升了预测精度。俞蕾等^[8]构建了聚类方法与 GM(1,1)相结合的车辙预测模型,能够有效描述车辙发展规律。Du 等^[9]针对干湿试验条件下的车辙深度数据,将灰色系统理论的概念应用于沥青车辙深度预测,推导了预测模型方程,引入加载轴次并构建了 GM(1,2)模型。然而这些研究仅仅针对特定的路面结构或实验室测试进行研究,无法很好验证灰色模型在不同沥青路面上的真实表现。

在路面学科中,足尺寸加速加载试验是一项大规模的科学实验。通过在与实际相同或相似的路面结构体系上加速加载,可施加不小于标准轴重的轮载,使车辆在短时间内完成试验。测试周期模拟路面结构在其整个生命周期中的响应特征和性能演变^[12]。我国于 2015 年 11 月建成宽刚度域基层结构 RIOHTrack(research institute of highway MOT track)^[13],来评价长寿命沥青路面全生命周期的使用性能,以获取沥青路面在其整个生命周期中服役性能演变的信息。

综上,本文收集了 RIOHTrack 实验场地 19 种

路面的车辙深度长期演化过程,提出一种新的沥青路面车辙预测模型——分数阶累加振荡型灰色模型(FGM(1,1|sin)模型)。主要包含以下部分:1)采用分数阶累加算子,引入了时间权重,增强对不同路面的车辙深度数据挖掘能力。2)从 RIOHTrack 实验数据中发现不同沥青路面的车辙深度会存在振荡现象,为此在 GM(1,1)模型的基础上增加了正弦算子,增强了模型对车辙深度的拟合能力。3)将 FGM(1,1|sin)模型应用在 19 种不同的沥青路面进行测试,相较于其他算法取得了更高的预测精度。

1 FGM(1,1|sin)模型

1.1 GM(1,1)模型基本原理

GM(1,1)模型是一阶单变量灰色模型^[14-15]。其能够通过有限的信息寻找规律并进行模型建构,从而对初始数据进行拟合和预测。以下为具体建模过程。

1)一阶累加生成序列。假设存在一个包含 n 个样本的时间序列数据为

$$\mathbf{X}^{(0)} = [\mathbf{x}^{(0)}(1), \mathbf{x}^{(0)}(2), \dots, \mathbf{x}^{(0)}(n)]^T,$$

对于初始序列 $\mathbf{X}^{(0)}$,应用一阶累加生成算子(accumulated generating operation, AGO)得

$$\mathbf{x}^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}^{(0)}(i),$$

其中, $k = 1, 2, \dots, n$ 。可以得到序列

$$\mathbf{X}^{(1)} = [\mathbf{x}^{(1)}(1), \mathbf{x}^{(1)}(2), \dots, \mathbf{x}^{(1)}(n)]^T,$$

称之为原始序列的一阶 AGO 序列。

2)均值生成序列。令

$$\mathbf{z}^{(1)}(k) = (\mathbf{x}^{(1)}(k-1) + \mathbf{x}^{(1)}(k))/2,$$

其中 $k = 2, 3, \dots, n$ 。可以得到序列

$$\mathbf{Z}^{(1)} = [\mathbf{z}^{(1)}(2), \mathbf{z}^{(1)}(3), \dots, \mathbf{z}^{(1)}(n)]^T,$$

称之为均值生成序列。

3)建立灰色预测模型。构造一阶白化微分方程

$$d\mathbf{x}^{(1)}(k)/dk + a\mathbf{x}^{(1)}(k) = b,$$

其中 a 和 b 是模型常量参数。方程可被重写为

$$d\mathbf{x}^{(1)}(k)/dk = b - a\mathbf{x}^{(1)}(k).$$

求解该一阶白化微分方程,可以得到一阶 AGO 序列的时间响应函数为

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k+1) = (\mathbf{x}^{(0)}(1) - b/a)e^{-ak} + b/a.$$

通过逆累加操作(即连续项之间相减)恢复原始序列 $\mathbf{x}^{(0)}(k)$, 最终模型在解出白化微分方程之后变为

$$\mathbf{x}^{(0)}(k) + a\mathbf{z}^{(1)}(k) = b,$$

该方程即为 GM(1,1)模型, 其中

$$\mathbf{z}^{(1)}(k) = (\mathbf{x}^{(1)}(k) + \mathbf{x}^{(1)}(k+1))/2.$$

4) 参数估计。记参数 $\boldsymbol{\theta} = (a, b)^T$, 其估计值为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{a}, \hat{b})^T, \text{ 利用最小二乘法估计参数可得}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y},$$

其中,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{z}^{(1)}(2) & 1 \\ -\mathbf{z}^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\mathbf{z}^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)}(2) \\ \mathbf{x}^{(0)}(3) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(0)}(n) \end{bmatrix}.$$

将参数估计值代入时间响应函数, 得到方程的时间响应序列为

$$\hat{\mathbf{X}}^{(1)} = [\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(1), \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(2), \dots, \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(n)]^T,$$

$$\text{其中, } \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k+1) = (\mathbf{x}^{(0)}(1) - \hat{b}/\hat{a})e^{-\hat{a}k} + \hat{b}/\hat{a},$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

5) 逆向累加还原。对 $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k)$ 做一阶累加生成算子的逆运算 (inverse accumulated generating operation, IAGO), 得到原始序列的时间响应预测方程

$$\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k) =$$

$$(\mathbf{x}^{(0)}(1) - \hat{b}/\hat{a})(1 - e^{-\hat{a}})e^{\hat{a}k},$$

$$\text{其中 } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

尽管 GM(1,1)模型在某些情境下可呈现较好的预测效果, 但其存在多项限制。首先, 该模型对原始数据序列的要求较为严格, 必须具备明显的趋势性和规律性, 对非线性、非稳态或受到较大噪声干扰的数据表现可能不佳; 其次, 基于一阶累加生成算子的假设使得该模型难以处理多元时间序列或多变量预测问题, 因为它无法捕捉数据序列中的多样化发展趋势; 另外, 该模型对初始值的选取极为敏感, 不同的初始值可能导致截然不同的预测结果, 且缺乏一种通用的方法来确定最佳的初始值; 此外, GM(1,1)模型是一种局部拟合方法, 仅考虑最近一段时间内的数据信息, 因此在长期趋势的预测

方面效果可能不尽如人意。

1.2 分数阶累加生成算子

根据 1.1 节的内容容易得出, 每个数据点对 AGO 序列的贡献是相等的。但是, 由于系统的历史效应, 每个点对 AGO 序列的影响程度不尽相同。在此基础上, 为了使得传统灰色预测模型中解的扰动界更小, 考虑系统的历史效应, 提出了一种新的计算方式。这种新的运算符被称为分数阶累加生成算子 (fractional accumulated generating operation, FA-AGO)^[6], 其定义如下:

设含有 n 个样本的原始序列

$$\mathbf{X}^{(0)} = [\mathbf{x}^{(0)}(1), \mathbf{x}^{(0)}(2), \dots, \mathbf{x}^{(0)}(n)]^T,$$

对时间序列 $\mathbf{X}^{(0)}$ 运用 r 阶累加生成算子

$$\mathbf{x}^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} k-i+r-1 \\ k-i \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)}(i),$$

其中: $k = 1, 2, \dots, n; r$ 为实数, 并且

$$\begin{bmatrix} k-i+r-1 \\ k-i \end{bmatrix} =$$

$$(r+k-i-1)(r+k-i-2)\cdots(r+1)r/(k-i)!.$$

可以得到

$$\mathbf{x}^{(r)} = [\mathbf{x}^{(r)}(1), \mathbf{x}^{(r)}(2), \dots, \mathbf{x}^{(r)}(n)]^T,$$

称之为原始序列的 r 阶 AGO 序列, 可以用矩阵计算形式表达为

$$\mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{A}\mathbf{X}^{(r-1)} = \cdots = \mathbf{A}^r \mathbf{X}^{(0)},$$

其中矩阵的元素为

$$(\mathbf{a}_{in}^r)_{n \times n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} k-i+r-1 \\ k-i \end{bmatrix}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases},$$

r 阶累加生成算子的逆运算 (r 阶 IAGO) 定义为

$$\mathbf{x}^{(r-1)}(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{X}^{(r-1)}(i) - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{X}^{(r-1)}(i) =$$

$$\mathbf{x}^{(r)}(k) - \mathbf{x}^{(r)}(k-1).$$

类似地, r 阶 IAGO 序列用矩阵计算形式表达为

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{A}^{-r} \mathbf{X}^{(r)}.$$

1.3 FGM(1,1|sin)模型基本原理

令 $\mathbf{X}^{(0)}$ 为原始序列, $\mathbf{X}^{(r)}$ 为 r 阶 AGO 序列, $\mathbf{Z}^{(r)} = [\mathbf{Z}^{(r)}(2), \mathbf{Z}^{(r)}(3), \dots, \mathbf{Z}^{(r)}(n)]^T$ 为 $\mathbf{X}^{(r)}$ 的均值生成序列, 其中

$$\mathbf{z}^{(r)}(k) = (\mathbf{x}^{(r)}(k-1) + \mathbf{x}^{(r)}(k))/2.$$

在原始GM(1,1)模型的基础上,引入分数阶累加生成算子和正弦项,得到方程为

$$\mathbf{x}^{(r-1)}(k) + a\mathbf{z}^{(r)}(k) = b_1 \sin(pk) + b_2,$$

其中: b_1 、 b_2 是模型的常量参数; p 是描述正弦波频率的参数。

记参数 $\boldsymbol{\theta} = (a, b_1, b_2)^T$, 利用最小二乘法可估计参数为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y},$$

其中,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{z}^{(r)}(2) & \sin(2p) & 1 \\ -\mathbf{z}^{(r)}(3) & \sin(3p) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mathbf{z}^{(r)}(n) & \sin(np) & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(r-1)}(2) \\ \mathbf{x}^{(r-1)}(3) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(r-1)}(n) \end{bmatrix}.$$

该模型的白化微分方程为

$$d\mathbf{x}^{(r)}(k)/dk + a\mathbf{x}^{(r)}(k) = b_1 \sin(pk) + b_2.$$

在初始条件 $\mathbf{x}^{(r)}(0) = \mathbf{x}^{(0)}(1)$ 下, 时间响应序列的估计为

$$\hat{\mathbf{x}}^{(r)}(k+1) = [\mathbf{x}^{(0)}(1) + b_1 p / (a^2 + p^2) - b_2 / a] e^{-ak} + b_1 (a \sin(pk) - p \cos(pk)) / (a^2 + p^2) + b_2 / a,$$

其中 $k = 0, 1, \dots, n-1$ 。

从而得到原始序列的预测, 其矩阵形式为

$$\hat{\mathbf{X}}^{(0)} = \mathbf{A}^{-r} \hat{\mathbf{X}}^{(r)}.$$

2 实例分析

2.1 数据来源

RIOHTrack 足尺路面环道由 2 个平行直道和 2 个弯道组成, 总长约 2 038 m。该环道的鸟瞰图如图 1 所示。本实验所使用的数据源自环道结构图中直道部分的 19 种沥青结构路面, 基本涵盖了我国高等级公路全部沥青结构层的厚度及厚沥青路面柔性基层的厚度^[17]。

RIOHTrack 足尺环道的建成和启用提供了一个真实环境下的实验平台, 有助于深入理解沥青路面在不同条件下的性能表现。RIOHTrack 足尺环道采用装载重型卡车进行加速加载实验, 车辆行驶速度为 50~60 km/h, 装载车辆累计行驶 2 万 km 为一个

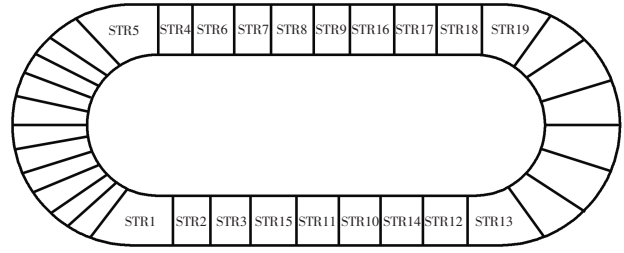


图 1 RIOHTrack 足尺环道结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of RIOHTrack full-scale loop structure

试验装载循环^[18]。研究足尺环道可以更准确地评估沥青路面在长期使用过程中的耐久性、稳定性和抗损耗能力。这种研究有助于改进公路设计和建造标准, 提高路面结构的耐久性和安全性, 减少养护维修成本, 最终推动公路交通系统的可持续发展。

2.2 模型搭建

本实验选取每种路面 4 年的车辙深度演化数据进行数据集划分, 其中前 3 年的数据 (60 个采样点) 作为训练集, 第 4 年的数据 (19 个采样点) 作为测试集。具体模型框架见图 2。对于 19 种沥青路面分别构建 GM(1,1)、FGM(1,1) (仅引入分数阶累加算子模型)、GM(1,1|sin) (仅引入正弦算子模型)、FGM(1,1|sin) 4 种模型, 其中 GM(1,1)、GM(1,1|sin) 的数据需进行级比检验^[19-20]。

为验证本文 FGM(1,1|sin) 预测模型在车辙深度数据上的有效性, 选取均方根误差 (root mean squared error, RMSE)、平均绝对误差 (mean absolute error, MAE) 和平均绝对百分比误差 (mean absolute percentage error, MAPE) 作为该模型的评价指标, 计算公式为

$$RMSE = \sqrt{(\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2) / n},$$

$$MAE = (\sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|) / n,$$

$$MAPE = (\sum_{i=1}^n |(\hat{y}_i - y_i) / y_i|) \times 100\% / n,$$

其中: n 为样本数; y_i 为真实值; \hat{y}_i 为预测值。

根据每条路面上 4 种模型的指标数据, 绘制如图 3 所示的箱线图。从图 3 可以看出, 对于原始 GM(1,1) 模型, 分数阶的引进显著改善了模型效果, 正弦算子的加入使拟合更加合理, 从而得到更好的预测效果, 且效果较为稳定。

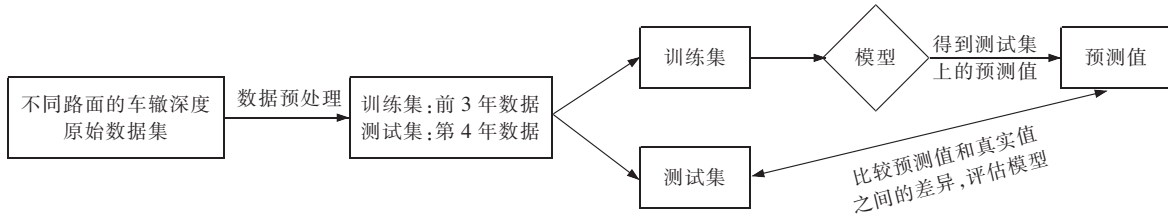


图 2 车辙深度预测模型框架

Fig. 2 Rut depth prediction model framework

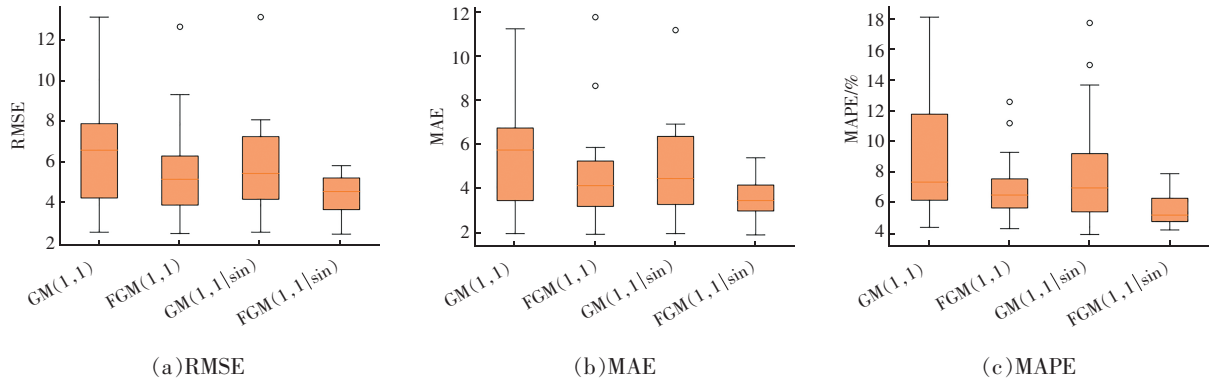


图 3 评价指标箱线图

Fig. 3 Boxplot of evaluation metrics

从表 1 可知,FGM(1,1|sin)模型效果相较于其他 3 种模型有显著的提升:其平均 RMSE 较原始 GM(1,1)模型提升了 32.82%,较 FGM(1,1)模型提升了 20.29%,较 GM(1,1|sin)模型提升了 25.44%;其平均 MAE 较原始 GM(1,1)模型提升了 36.49%,较 FGM(1,1)模型提升了 23.98%,较 GM(1,1|sin)模型提升了 28.37%;其平均 MAPE 较原始 GM(1,1)模型提升了 37.95%,较 FGM(1,1)模型提升了 20.18%,较 GM(1,1|sin)模型提升了 30.74%。实例分析可知,FGM(1,1|sin)模型对 19 种不同结构的沥青路面车辙深度能够有效建模。

表 1 不同模型的平均评价指标值对比

Tab. 1 Comparison of average evaluation metrics across different models

模型	平均 RMSE	平均 MAE	平均 MAPE/%
GM(1,1)	6.526	5.550	8.902
FGM(1,1)	5.500	4.637	6.921
GM(1,1 sin)	5.880	4.921	7.976
FGM(1,1 sin)	4.384	3.525	5.524

注:表中的指标为该模型在 19 种路面结构的平均表现。

3 结论

本文构建了基于 FGM(1,1|sin)的 RIOHTrack 足尺环道车辙深度预测模型。鉴于传统灰色预测模型在数据预测方面存在的一些限制,通过引入分数阶累加生成算子,弥补了传统模型的不足。此外,考虑到 RIOHTrack 实验中不同结构的沥青路面车辙深度数据具有波动性,引入正弦项,从而可以更准确地拟合车辙深度。针对 RIOHTrack 足尺环道的 19 种不同沥青路面的加速加载实验数据进行建模,验证 FGM(1,1|sin)模型改进策略的有效性。结果表明,在本文的预测任务中,该模型表现出较高的精度,并且适用于不同结构的沥青路面。本研究中的预测模型仍存在一定局限性,如参数的选取主要依赖于手动调整。在未来的改进工作中,可考虑引入多种优化算法,以进一步提升参数选择的自动化和精确性。

参考文献:

- [1] 李卓轩, 赵璇, 曹进德, 等. 政务服务中群众留言答复意见评价模型[J]. 南京信息工程大学学报(自然科学

- 版), 2022, 14(2):178–185.
- LI Z X, ZHAO X, CAO J D, et al. Evaluation of replies to public consultations in government service[J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology (Natural Science Edition), 2022, 14(2):178–185. (in Chinese)
- [2] 李卓轩, 林凯迪, 郭建华, 等. 基于车联网数据的运输车辆安全评价模型[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2020, 19(1):26–32.
- LI Z X, LIN K D, GUO J H, et al. Transportation vehicle safety evaluation model based on vehicle network data[J]. Journal of Nantong University (Natural Science Edition), 2020, 19(1):26–32. (in Chinese)
- [3] LI Z X, SHI X L, CAO J D, et al. CPSO–XGBoost segmented regression model for asphalt pavement deflection basin area prediction[J]. Science China Technological Sciences, 2022, 65(7):1470–1481.
- [4] LI Z X, KOROVIN I, SHI X L, et al. A data–driven rutting depth short–time prediction model with metaheuristic optimization for asphalt pavements based on RIOHTrack[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2023, 10(10):1918–1932.
- [5] WANG Y, YAN J, HUANG W, et al. Variable–order fractional derivative rutting depth prediction of asphalt pavement based on the RIOHTrack full–scale track[J]. Science China (Information Sciences), 2023, 66(5):196–214.
- [6] 吕松涛, 赵霏, 鲁巍巍, 等. 面向长寿命的既有高速公路沥青路面延寿设计综述[J]. 交通运输工程学报, 2024, 24(2):20–49.
- LÜ S T, ZHAO P, LU W W, et al. Review on long–life–oriented life extension design of existing expressway asphalt pavement[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2024, 24(2):20–49. (in Chinese)
- [7] 张琛, 汪海年, 王宠惠. 基于组合模型的沥青路面车辙预测[J]. 北京工业大学学报, 2016, 42(8):1208–1214.
- ZHANG C, WANG H N, WANG C H. Prediction of rutting of asphalt pavement based on combined model[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2016, 42(8):1208–1214. (in Chinese)
- [8] 俞蕾, 周岚, 熊亮. 基于聚类灰色预测模型的沥青路面车辙研究[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2015, 38(2):219–221.
- YU L, ZHOU L, XIONG L. Study of asphalt pavement rutting based on clustering gray forecasting model[J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2015, 38(2):219–221. (in Chinese)
- [9] DU J C, CROSS S A. Cold in–place recycling pavement rutting prediction model using grey modeling method[J]. Construction and Building Materials, 2007, 21(5):921–927.
- [10] 殷克东, 张凯, 杨文栋. 基于概率累加的离散 GM(1, 1) 模型及其在海洋天然气产量预测中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2024, 44(8):2733–2746.
- YIN K D, ZHANG K, YANG W D. A discrete GM(1, 1) model based on probabilistic accumulation and its application to offshore gas production forecasting[J]. Systems Engineering–Theory & Practice, 2024, 44(8):2733–2746. (in Chinese)
- [11] 罗党, 王小雷. 耦合三角函数的灰色 GM(1, 1, T) 模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(7):1906–1917.
- LUO D, WANG X L. Grey GM(1, 1, T) model coupled with trigonometric function and its application[J]. Systems Engineering–Theory & Practice, 2020, 40(7):1906–1917. (in Chinese)
- [12] METCALF J B. A brief history of full–scale accelerated pavement testing facilities to 1962[M]//The Roles of Accelerated Pavement Testing in Pavement Sustainability. Cham: Springer International Publishing, 2016:3–16.
- [13] 王旭东. 足尺路面试验环道路面结构与材料设计[J]. 公路交通科技, 2017, 34(6):30–37.
- WANG X D. Design of pavement structure and material for full–scale test track[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2017, 13(6):30–37. (in Chinese)
- [14] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 修订版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.
- [15] 吴利丰, 高晓辉, 付斌, 等. 灰色 GM(1, 1) 模型研究综述[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(15):227–233.
- WU L F, GAO X H, FU B, et al. Advance in grey GM(1, 1) model research[J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2017, 47(15):227–233. (in Chinese)
- [16] WU L F, LIU S F, YAO L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18

- 类算法[J]. 昆明理工大学学报(自然科学版), 2024, 49(1):83-97.
- WANG M X, WAN R X, MIAO D Q, et al. An ant colony clustering algorithm based on three-way decision[J]. Journal of Kunming University of Science and Technology (Natural Science), 2024, 49(1):83-97. (in Chinese)
- [12] 高茂源, 王好臣. 基于改进蚁群算法的移动机器人路径规划[J]. 传感器与微系统, 2021, 40(6):142-144.
- GAO M Y, WANG H C. Path planning for mobile robots based on improved ant colony algorithm[J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2021, 40(6):142-144. (in Chinese)
- [13] MCKAY M D, BECKMAN R J, CONOVER W J. Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code[J]. Technometrics, 1979, 21(2):239-245.
- [14] WU D, RAO H H, WEN C S, et al. Modified sand cat swarm optimization algorithm for solving constrained engineering optimization problems[J]. Mathematics, 2022, 10(22):4350.
- [15] 钟发海. 基于 t 分布的力导向图布局及其近似求解方法[D]. 济南:山东大学, 2023.
- ZHONG F H. Force-directed graph layout based on the t -distribution and its approximate solution method[D]. Jinan: Shandong University, 2023. (in Chinese)
- [16] 吕苏琪. 基于独立 t 分布的稳健因子分析[D]. 昆明:云南财经大学, 2023.
- LÜ S Q. Robust factor analysis based on independent t distribution[D]. Kunming: Yunnan University of Finance and Economics, 2023. (in Chinese)
- [17] 徐鹏. 偏正态分布与偏 t 分布的研究[D]. 南京:南京邮电大学, 2022.
- XU P. Research on skew normal distribution and skew- t distrib[D]. Nanjiang: Nanjing University of Posts and Telecommunications, 2022. (in Chinese)
- [18] YAO X, LIU Y, LIN G M. Evolutionary programming made faster[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(2):82-102.

(责任编辑:张燕)

(上接第 22 页)

(7):1775-1785.

- [17] WANG X D, ZHOU G L, LIU H Y, et al. Key points of RIOHTrack testing road design and construction[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development (English Edition), 2020, 14(4):1-16.
- [18] 周兴业, 王旭东, 单伶俐, 等. 基于 RIOHTrack 足尺环道全寿命周期试验的沥青路面车辙变形长期演化行为[J]. 中国公路学报, 2023, 36(12):12-21.
- ZHOU X Y, WANG X D, SHAN L Y, et al. Long-term evolution behavior of rutting deformation on asphalt pavement based on RIOHTrack full-scale loop life-cycle test [J]. China Journal of Highway and Transport, 2023, 36(12):12-21. (in Chinese)
- [19] 李福琴, 刘建国. 数据变换提高灰色预测模型精度的研究[J]. 统计与决策, 2008, 24(6):15-17.
- LI F Q, LIU J G. Research on improving the accuracy of grey prediction model by data transformation[J]. Statistics & Decision, 2008, 24(6):15-17. (in Chinese)
- [20] 黄福勇. 灰色系统建模的变换方法[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 14(6):35-38.
- HUANG F Y. Method of transformation for modelling in grey systems[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 1994, 14(6):35-38. (in Chinese)

(责任编辑:仇慧)