doi: 10.12194/j.ntu.20230926001
引文格式: 羌湘琦. 自同构系统的拓扑刚性[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2024, 23(3):89-94.

自同构系统的拓扑刚性

羌湘琦
(江苏科技大学 理学院, 江苏 镇江 212100)

摘要:研究了可数离散群在紧度量空间 étale 等价关系上的自同构作用。文章引入了自同构系统上连续强轨道等价的定义,证明了共轭的两个自同构系统一定是连续强轨道等价的,反之,在本质自由和离散群是顺从无挠的条件下,满足刚性条件的两个连续强轨道等价的自同构系统是共轭的。

关键词:自同构系统;广群;连续强轨道等价;共轭
中图分类号: O189.11 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-2340(2024)03-0089-06

Topological rigidity of automorphism systems

QIANG Xiangqi
(School of Science, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212100, China)

Abstract: This paper studies the automorphism actions of countable discrete groups on the étale equivalence relations on compact metric spaces. First, the notion of continuous strong orbit equivalence for automorphism systems is introduced and it is proved that two conjugate automorphism systems are continuously strong orbit equivalent. Conversely, under the conditions of essentially freeness and discrete groups being amenable and torsion-free, two continuously strong orbit equivalent automorphism systems satisfying the rigid condition are conjugate.

Key words: automorphism system; groupoid; continuous strong orbit equivalence; conjugacy

算子代数与遍历理论之间的相互作用始于 Murray 和 von Neumann 关于群 von Neumann 代数的构造[1]。1959 年和 1963 年,Dye[2-3]对遍历保测作用在轨道等价下进行了分类;1976 年,Krieger[4]证明了两个遍历非奇异变换是轨道等价的当且仅当对应的 von Neumann 交叉积代数是同构的。这类研究的深入不仅产生了大量有趣的算子代数的例子,也促进了拓扑动力学的发展,其中最著名的结果是 Giordano 等[5]人通过 K-理论证明了两个 Cantor 极小系统是强轨道等价的当且仅当对应的 C^*-交叉积代数是同构的。他们的工作被推广到许多不同的方向,如 Tomiyama[6]对紧的 Haursdorff 空间上拓扑自由同胚系统的研究、Matsumoto 等[7-8]人对不可约拓扑Markov 移位关于 Cuntz-Krieger 代数的分类,以及连续群作用[9]、(可逆)半群作用[10-12]在轨道等价等意义下的分类等等,极大地发展了动力系统和算子代数之间的关系。更多的相关研究可以参见文献[13-15]。

作为 Singer 和 Feldman Moore 关于概率保测作用在轨道等价意义下分类结果的拓扑模拟,Li[9]提出了连续群作用上的连续轨道等价理论,并用对应的变换广群和约化交叉积代数进行了刻画。Li 还研究了一般群作用的连续轨道等价刚性,即连续轨道等

收稿日期: 2023-09-26 **接受日期**: 2023-12-05
基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(12401156)
第一作者简介: 羌湘琦(1994—), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为泛函分析、算子代数。E-mail: xq.qiang@just.edu.cn

价的动力系统是否是共轭的。Qiang 等在文献[16]中对群的膨胀作用引入了渐近连续轨道等价理论，并且在文献[17]中考虑了离散群在紧度量空间 étale 等价关系上的自同构作用，借助于半直积广群及其约化广群 C^*-代数的同构性质，完全刻画了本质自由的动力系统的连续轨道等价性。受上述研究的启发，本文继续研究 étale 等价关系上的自同构作用，讨论该系统的连续强轨道等价刚性，在一定条件下，证明了连续强轨道等价的自同构系统是共轭的。

1 预备知识

本文所涉及广群的相关概念和术语可参见文献[18-20]。令 $\mathscr{G}$ 是一个拓扑广群，$\mathscr{G}^{(2)} \subset \mathscr{G} \times \mathscr{G}$ 是可乘元素对集。对 $x \in \mathscr{G}$，称 $r(x) = xx^{-1}$ 是 x 的 range，$s(x) = x^{-1}x$ 是 x 的 source，$\mathscr{G}^{(0)} = r(\mathscr{G}) = s(\mathscr{G})$ 是 $\mathscr{G}$ 的单位空间。若映射 $r, s: \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$ 是局部同胚，则称广群 $\mathscr{G}$ 是 étale 的。设 U 是 étale 广群 $\mathscr{G}$ 的开子集，若限制映射 $r: U \to r(U)$ 和 $s: U \to s(U)$ 均是到 $\mathscr{G}^{(0)}$ 的开子集上的同胚，则称 U 是一个 bisection。设 Φ 是 étale 广群 $\mathscr{G}$ 到 $\mathscr{H}$ 的映射，若对任意的 $(r, r') \in \mathscr{G}^{(2)}$，有 $(\Phi(r), \Phi(r')) \in \mathscr{H}^{(2)}$，$\Phi(rr') = \Phi(r)\Phi(r')$，并且 Φ 是连续的，则称 Φ 是一个同态。若 Φ 是一个同胚使得 Φ 和 Φ^{-1} 均是同态，则称 Φ 是一个 étale 广群同构，并且称从广群到群的同态为 cocycle。

设 X 是一个紧致的度量空间，G 是可数离散群，$\mathscr{R}$ 是 X 上的 étale 等价关系，即 $\mathscr{R} \subseteq X \times X$ 是一个拓扑等价关系使得 range 映射 $r: \mathscr{R} \to X, (x, y) \mapsto x$ 是一个局部同胚。若对任意的 $g \in G$，α_g 是 $\mathscr{R}$ 上的 étale 广群自同构，则称拓扑动力系统 $G \curvearrowright_\alpha \mathscr{R}$ 是一个自同构系统，G 在 $\mathscr{R}$ 上的作用 α 表示为 $(g, (x, y)) \in G \times \mathscr{R} \to g(x, y) \in \mathscr{R}$。显然，该系统也诱导了 G 在 X 上的同胚作用，我们仍记作 α，表示为 $(g, x) \in G \times X \to gx \in X$，使得对任意的 $g \in G$，$(x, y) \in \mathscr{R}$ 有 $g(x, y) = (gx, gy)$。用符号 $G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 表示这样的自同构系统。

给定一个自同构系统 $G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$，存在 3 个拓扑代数结构：其一是变换广群 $G \ltimes X = \{(g, x): g \in G, x \in X\}$，其上的乘法和逆运算分别定义为

$$(g, hx)(h, x) = (gh, x),$$

$$(g, x)^{-1} = (g^{-1}, gx)。$$

在乘积拓扑下，$G \ltimes X$ 是一个 étale 广群。其二是半直积广群 $\mathscr{R} \times_\alpha G = \{((x, y), g): (x, y) \in \mathscr{R}, g \in G\}$，其上的乘法和逆运算分别定义为

$$((x, y), g)((g^{-1}y, v), h) = ((x, gv), gh),$$

$$((x, y), g)^{-1} = ((g^{-1}y, g^{-1}x), g^{-1})。$$

在乘积拓扑下，$\mathscr{R} \times_\alpha G$ 是一个 étale 广群。其三是半直积广群 $\mathscr{R} \rtimes_\alpha G = \{(x, g, y): g \in G, x, y \in X, (x, gy) \in \mathscr{R}\}$，其上的乘法和逆运算分别定义为

$$(x, g, y)(y, h, v) = (x, gh, v),$$

$$(x, g, y)^{-1} = (y, g^{-1}, x)。$$

考虑映射 $\gamma_0: \mathscr{R} \rtimes_\alpha G \to \mathscr{R} \times_\alpha G, (x, g, y) \mapsto ((x, gy), g)$，则 γ_0 是以 $\gamma_0^{-1}((x, y), g) = (x, g, g^{-1}y)$ 为逆的双射。通过该映射将 $\mathscr{R} \times_\alpha G$ 上的拓扑转移到 $\mathscr{R} \rtimes_\alpha G$ 上，则 $\mathscr{R} \rtimes_\alpha G$ 也是一个 étale 广群，此时，γ_0 是一个 étale 广群同构。

注 1 1)在映射 $(x, y) \in \mathscr{R} \to ((x, y), e) \in \mathscr{R} \times_\alpha G$，$(g, x) \in G \ltimes X \to ((gx, gx), g) \in \mathscr{R} \times_\alpha G$ 下，等价关系 $\mathscr{R}$ 和变换广群 $G \ltimes X$ 可以看作是 $\mathscr{R} \times_\alpha G$ 的 étale 子广群。

2)在映射 $(x, y) \in \mathscr{R} \to (x, e, y) \in \mathscr{R} \rtimes_\alpha G$，$(g, x) \in G \ltimes X \to (gx, g, x) \in \mathscr{R} \rtimes_\alpha G$ 下，等价关系 $\mathscr{R}$ 和变换广群 $G \ltimes X$ 可以看作是 $\mathscr{R} \rtimes_\alpha G$ 的 étale 子广群。

设 $G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 是一个自同构系统，$x \in X$，记 $[x]_G = \{gx: g \in G\}$ 为点 x 在作用 α 下的轨道，将这个轨道与等价关系 $\mathscr{R}$ 下的轨道相结合，可以得到如下双轨道：

$$[x]_{G, \mathscr{R}} = \{y \in X: 存在\ g \in G\ 使得\ (x, gy) \in \mathscr{R}\}。$$

Li 在文献[9]中引入了群作用下(连续)轨道等价的定义，笔者也在文献[17]中引入了自同构系统上(连续)轨道等价的定义。结合上述的两个轨道结构，引入如下定义。

定义 1 给定两个自同构系统 $G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 和

$H \curvearrowright_{\beta} (Y, \mathscr{S})$，如果存在同胚 $\varphi: X \to Y$ 使得对任意的 $x \in X$，有 $\varphi([x]_G) = [\varphi(x)]_H$，$\varphi([x]_{G,\mathscr{R}}) = [\varphi(x)]_{H,\mathscr{S}}$，那么称它们是强轨道等价的。

在上述的定义中，对 $x \in X, g \in G$，存在 $h \in H$ 使得 $\varphi(gx) = h\varphi(x)$，对 $x, y \in X, g \in G$ 满足 $(x, gy) \in \mathscr{R}$，存在 $h \in H$ 使得 $(\varphi(x), h\varphi(y)) \in \mathscr{S}$。类似地，对 $y \in Y, h \in H$，存在 $g \in G$ 使得 $\varphi^{-1}(hy) = g\varphi^{-1}(y)$，对 $u, v \in Y, h \in H$ 满足 $(u, hv) \in \mathscr{S}$，存在 $g \in G$ 使得 $(\varphi^{-1}(u), g\varphi^{-1}(v)) \in \mathscr{R}$。因此，我们引入下述定义。

定义 2 给定两个自同构系统 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_{\beta} (Y, \mathscr{S})$，如果存在同胚 $\varphi: X \to Y$ 以及连续映射 $a: \mathscr{R} \times_{\alpha} G \to H$，$b: \mathscr{S} \times_{\beta} H \to G$ 满足下述条件：

(i)映射 $((x, y), g) \in \mathscr{R} \times_{\alpha} G \to (\varphi(x), a((x, y), g)\varphi(g^{-1}y)) \in \mathscr{S}$ 是连续的，并且对任意的 $x \in X, g \in G$，有 $\varphi(gx) = a((gx, gx), g)\varphi(x)$，

(ii)映射 $((u, v), h) \in \mathscr{S} \times_{\beta} H \to (\varphi^{-1}(u), b((u, v), h)\varphi^{-1}(h^{-1}v)) \in \mathscr{R}$ 是连续的，并且对任意的 $y \in Y, h \in H$，有 $\varphi^{-1}(hy) = b((hy, hy), h)\varphi^{-1}(y)$，

那么称 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_{\beta} (Y, \mathscr{S})$ 是连续强轨道等价的。

显然，如果 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_{\beta} (Y, \mathscr{S})$ 是连续强轨道等价的，那么它们是强轨道等价并且连续轨道等价的。此外，$G \curvearrowright_{\alpha} X$ 和 $H \curvearrowright_{\beta} Y$ 通过同胚 φ 和限制映射 $a|_{G \ltimes X}$，$b|_{H \ltimes Y}$ 是连续轨道等价的。

定义 3[17] 给定两个自同构系统 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_{\beta} (Y, \mathscr{S})$，如果存在同构 $\widetilde{\varphi}: \mathscr{R} \to \mathscr{S}$ 以及群同构 $\theta: G \to H$，使得对任意的 $\gamma \in \mathscr{R}, g \in G$ 有 $\widetilde{\varphi}(g\gamma) = \theta(g)\widetilde{\varphi}(\gamma)$，那么称它们是共轭的。

注 2 定义 3 也等价于存在同胚 $\varphi: X \to Y$ 以及群同构 $\theta: G \to H$，使得映射 $\varphi \times \varphi: (x, y) \in \mathscr{R} \to (\varphi(x), \varphi(y)) \in \mathscr{S}$ 是一个同构，并且对任意的 $x \in X$，$g \in G$ 有 $\varphi(gx) = \theta(g)\varphi(x)$。

定义 4[9,17] 如果对任意的 $e \neq g \in G$，集合 $\{x \in X: gx \neq x\}$ 在 X 中是稠密的，那么称系统 $G \curvearrowright_{\alpha} X$ 是拓扑自由的。如果对任意的 $e \neq g \in G$，集合 $\{x \in X: (x, gx) \notin \mathscr{R}\}$ 在 X 中是稠密的，那么称系统 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 是本质自由的。

显然，如果 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 是本质自由的，那么 $G \curvearrowright_{\alpha} X$ 是拓扑自由的。

定义 5 设 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 是一个自同构系统，H 是一个离散群。$G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 上的连续 H-cocycle 是指连续的 cocycle $a: \mathscr{R} \times_{\alpha} G \to H$。对于连续的 H-cocycle a 和 a'，如果存在连续映射 $u: X \to H$，使得对任意 $\gamma \in \mathscr{R} \times_{\alpha} G$ 有 $a(\gamma) = u(r(\gamma))a'(\gamma) \cdot u(s(\gamma))^{-1}$，那么称 a 和 a' 是连续同伦的，记作 $a \sim a'$。如果对任意的连续 H-cocycle a，存在群同态 $\rho: G \to H$ 使得 $a \sim \rho$，那么称 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 是连续 H-cocycle 刚性的。

注 3 1)上述定义的连续同伦是 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 上的一个等价关系；

2)$a \sim a'$ 当且仅当存在连续映射 $u: X \to H$ 使得对 $\gamma \in \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G$，$a(\gamma) = u(r(\gamma))a'(\gamma)u(s(\gamma))^{-1}$；

3)上述定义中的 ρ 可看作是 cocycle $\mathscr{R} \times_{\alpha} G \to H$，$((x, y), g) \mapsto \rho(g)$，或者是 $\mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G \to H$，$(x, g, y) \mapsto \rho(g)$。

2 主要结果和证明

由半直积广群 $\mathscr{R} \times_{\alpha} G$ 和 $\mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G$ 的定义以及 étale 广群同构 γ_0，可得下述引理。

引理 1 系统 $G \curvearrowright_{\alpha} (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_{\beta} (Y, \mathscr{S})$ 是连续强轨道等价的当且仅当存在同胚 $\varphi: X \to Y$ 以及连续映射 $a: \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G \to H$，$b: \mathscr{S} \rtimes_{\beta} H \to G$ 满足下述条件：

(i)映射 $(x, g, y) \in \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G \to (\varphi(x), a(x, g, y), \varphi(y)) \in \mathscr{S} \rtimes_{\beta} H$ 是连续的，进一步地，对任意的 $x \in X, g \in G$，有 $\varphi(gx) = a(gx, g, x)\varphi(x)$；

(ii)映射 $(u, h, v) \in \mathscr{S} \rtimes_{\beta} H \to (\varphi^{-1}(u), b(u, h, v), \varphi^{-1}(v)) \in \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G$ 是连续的，进一步地，对任意的 $y \in Y, h \in H$，有 $\varphi^{-1}(hy) = b(hy, h, y)\varphi^{-1}(y)$。

命题 1 如果 $G \curvearrowright_{\alpha}(X,\mathscr{R})$和 $H \curvearrowright_{\beta}(Y,\mathscr{S})$是共轭的,那么它们是连续强轨道等价的。

证明:假设系统 $G \curvearrowright_{\alpha}(X,\mathscr{R})$和 $H \curvearrowright_{\beta}(Y,\mathscr{S})$通过同胚 $\varphi:X \to Y$ 以及群同构 $\theta:G \to H$ 是共轭的。定义映射 $a:(x,g,y) \in \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G \to \theta(g) \in H$ 以及 $b:(u,h,v) \in \mathscr{S} \rtimes_{\beta} H \to \theta^{-1}(h) \in G$,则 a 和 b 是连续的 cocycle,并且映射$(x,g,y) \in \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G \to (\varphi(x), a(x,g,y),\varphi(y)) \in \mathscr{S} \rtimes_{\beta} H$ 和$(u,h,v) \in \mathscr{S} \rtimes_{\beta} H \to (\varphi^{-1}(u), b(u,h,v),\varphi^{-1}(v)) \in \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G$ 是连续的。进一步地,对 $x \in X, g \in G$ 有 $\varphi(gx) = \theta(g)\varphi(x) = a(gx,g,x)\varphi(x)$,对 $y \in Y, h \in H$ 有 $\varphi^{-1}(hy) = \theta^{-1}(h) \cdot \varphi^{-1}(y) = b(hy,h,y)\varphi^{-1}(y)$,即映射 φ、a 和 b 满足引理 1 中的要求,故而 $G \curvearrowright_{\alpha}(X,\mathscr{R})$和 $H \curvearrowright_{\beta}(Y,\mathscr{S})$是连续强轨道等价的。证毕。

本文剩余部分将讨论在何种条件下,命题 1 的逆命题也是成立的。首先,我们给出一个连续强轨道等价的自同构系统也是共轭系统的例子。但对于一般的系统,该结论是不成立的。

例 1[17] 设(X,φ)和(Y,ϕ)是两个拓扑传递的 Smale 空间,$\mathscr{R}_{\varphi}$和 $\mathscr{R}_{\phi}$分别是 X 和 Y 上的局部共轭关系,则(X,φ)和(Y,ϕ)诱导了自同构系统 $\mathbb{Z} \curvearrowright (\mathscr{R}_{\varphi},X)$和 $\mathbb{Z} \curvearrowright (\mathscr{R}_{\phi},Y)$。进一步地,$\mathbb{Z} \curvearrowright (\mathscr{R}_{\varphi},X)$和 $\mathbb{Z} \curvearrowright (\mathscr{R}_{\phi},Y)$是连续强轨道等价的当且仅当它们是共轭的。

引理 2[17] 在引理 1 中,如果 $G \curvearrowright_{\alpha}(X,\mathscr{R})$和 $H \curvearrowright_{\beta}(Y,\mathscr{S})$是本质自由的,则对任意的$(x,g,y) \in \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G$, $b(\varphi(x),a(x,g,y),\varphi(y)) = g$,且 b 由该式唯一决定。

引理 3 设 $G \curvearrowright_{\alpha}(X,\mathscr{R})$是一个自同构系统,如果 $f:X \to G$ 是一个连续映射,那么映射 $\pi:(x,y) \in \mathscr{R} \to (f(x)x,f(x)y) \in \mathscr{R}$ 也是连续的。

证明:令(x,y)是 $\mathscr{R}$ 中任意元,记 $f(x) = g$。由 f 的连续性,在 X 中存在 x 的开邻域 U,使得对任意的 $x' \in U$ 有 $f(x') = f(x) = g$。因为 $\alpha_{g^{-1}}$是 $\mathscr{R}$ 上的 étale 广群自同构,那么对任意 $\pi(x,y) = g(x,y)$的开 bisection V, $g^{-1}V$ 也是(x,y)的开 bisection。

记 $\widetilde{V} = g^{-1}V \cap r^{-1}(U)$,则 $\widetilde{V}$ 是(x,y)的开 bisection,并且对任意的$(u,v) \in \widetilde{V}$ 有 $u \in U$, $\pi(u,v) = (f(u)u,f(u)v) = g(u,v) \in g\widetilde{V} \subseteq V$,这表明 $\pi(\widetilde{V}) \subseteq V$,所以 π 是连续的。证毕。

命题 2 令 $G \curvearrowright_{\alpha}(X,\mathscr{R})$和 $H \curvearrowright_{\beta}(Y,\mathscr{S})$是两个本质自由的自同构系统,假设 $G \curvearrowright_{\alpha}(X,\mathscr{R})$和 $H \curvearrowright_{\beta}(Y,\mathscr{S})$是连续强轨道等价的,映射 a 给定如定义 2。如果存在同构 $\rho:G \to H$ 使得 $a \sim \rho$,那么 $G \curvearrowright_{\alpha}(X,\mathscr{R})$和 $H \curvearrowright_{\beta}(Y,\mathscr{S})$是共轭的。

证明:用引理 1 中的映射 φ、a、b 来证明该结果。因为 $a \sim \rho$,所以存在连续映射 $u:X \to H$,使得对任意的$(x,g,y) \in \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G$ 有 $a(x,g,y) = u(x)\rho(g) \cdot u(y)^{-1}$。定义映射 $\phi:x \in X \to u(x)^{-1}\varphi(x) \in Y$,则 ϕ 是连续的,并且对 $x \in X, g \in G$ 有

$$
\begin{aligned}
&\rho(g)\phi(x) = \rho(g)u(x)^{-1}\varphi(x) = \\
&\quad u(gx)^{-1}a(gx,g,x)\varphi(x) = \\
&\quad u(gx)^{-1}\varphi(gx) = \phi(gx)。
\end{aligned}
$$

定义映射 $v:y \in Y \to \rho^{-1}(u(\varphi^{-1}(y))^{-1}) \in G$, $\tilde{b}:(z,h,w) \in \mathscr{S} \rtimes_{\beta} H \to v(z)\rho^{-1}(h)v(w)^{-1}$,则对任意的$(x,g,y) \in \mathscr{R} \rtimes_{\alpha} G$ 有

$$
\begin{aligned}
&\tilde{b}(\varphi(x),a(x,g,y),\varphi(y)) = \\
&\quad v(\varphi(x))\rho^{-1}(a(x,g,y))v(\varphi(y))^{-1} = \\
&\quad \rho^{-1}(u(x)^{-1})\rho^{-1}(a(x,g,y))\rho^{-1}(u(y)) = \\
&\quad \rho^{-1}(u(x)^{-1}a(x,g,y)u(y)) = \\
&\quad \rho^{-1}(\rho(g)) = g。
\end{aligned}
$$

故而由引理 2,$\tilde{b} = b$。再定义映射 $\psi:y \in Y \to v(y)^{-1}\varphi^{-1}(y) \in X$,则 ψ 是连续的,并且对 $y \in Y, h \in H$ 有

$$
\begin{aligned}
&\rho^{-1}(h)\psi(y) = \rho^{-1}(h)v(y)^{-1}\varphi^{-1}(y) = \\
&\quad v(hy)^{-1}b(hy,h,y)\varphi^{-1}(y) = \\
&\quad v(hy)^{-1}\varphi^{-1}(hy) = \\
&\quad \psi(hy)。
\end{aligned}
$$

进一步地,对 $x \in X, y \in Y$ 有

$\psi(\phi(x)) = \psi(u(x)^{-1}\varphi(x)) =$

$\rho^{-1}(u(x)^{-1})\psi(\varphi(x)) =$

$\rho^{-1}(u(x)^{-1})v(\varphi(x))^{-1}x =$

$\rho^{-1}(u(x)^{-1})\rho^{-1}(u(x))x = x,$

$\phi(\psi(y)) = \phi(v(y)^{-1}\varphi^{-1}(y)) =$

$\rho(v(y)^{-1})\phi(\varphi^{-1}(y)) =$

$\rho(v(y)^{-1})u(\varphi^{-1}(y))^{-1}y =$

$u(\varphi^{-1}(y))u(\varphi^{-1}(y))^{-1}y = y,$

因此，ϕ 是以 ψ 为逆的同胚。

由注 1 可知，对 $\mathscr{R}$ 中任意元 (x,y)，$(\varphi(x), a(x,e,y)\varphi(y)) \in \mathscr{S}$，且 $a(x,e,y) = u(x)u(y)^{-1}$，故 $(\phi(x), \phi(y)) = (u(x)^{-1}\varphi(x), u(y)^{-1}\varphi(y)) = (u(x)^{-1}\varphi(x), u(x)^{-1}a(x,e,y)\varphi(y)) \in \mathscr{S}$。容易验证 $\phi \times \phi$ 是 $\mathscr{R}$ 到 $\mathscr{S}$ 上以 $\psi \times \psi$ 为逆的代数同构。

下证 $\phi \times \phi$ 是连续的。因为复合映射 $(x,y) \in \mathscr{R} \to (x,e,y) \in \mathscr{R} \rtimes_\alpha G \to (\varphi(x), a(x,e,y), \varphi(y)) \in \mathscr{S} \rtimes_\beta H \to (\varphi(x), a(x,e,y)\varphi(y)) \in \mathscr{S}$ 是连续的，由引理 3，映射 $(\varphi(x), a(x,e,y)\varphi(y)) \in \mathscr{S} \to (u(x)^{-1}\varphi(x), u(x)^{-1}a(x,e,y)\varphi(y)) \in \mathscr{S}$ 是连续的，故而 $\phi \times \phi$ 是连续的。类似可证得 $\psi \times \psi$ 是连续的，于是 $\phi \times \phi$ 是一个同胚，因此，$G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_\beta (Y, \mathscr{S})$ 是共轭的。证毕。

注 4 令 $c: \mathscr{R} \times_\alpha G \to H$ 是一个连续的 H-cocycle，则限制映射 $c_1 = c|_{G \ltimes X}: G \ltimes X \to H$ 和 $c_2 = c|_{\mathscr{R}}: \mathscr{R} \to H$ 都是连续的 H-cocycle。如果存在群同态 $\rho: G \to H$ 通过映射 $u: X \to H$ 使得 $c \sim \rho$，则由注 1，对任意的 $x \in X, g \in G$ 有 $c_1(g,x) = u(gx)\rho(g) \cdot u(x)^{-1}$，即在文献[9]的定义 4.2 下，$c_1 \sim \rho$。此外，对任意的 $(x,y) \in \mathscr{R}$，$c_2(x,y) = u(x)u(y)^{-1}$。

命题 3 令 G 是一个顺从的无挠群（即群 G 中除单位元 e 外其余元素的阶均为无限），$G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_\beta (Y, \mathscr{S})$ 是两个本质自由的系统。假设 $G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_\beta (Y, \mathscr{S})$ 是连续强轨道等价的，映射 a 给定如定义 2。如果存在群同态 $\rho: G \to H$ 使得 $a \sim \rho$，那么 ρ 是一个群同构。

证明：显然系统 $G \curvearrowright_\alpha X$ 和 $H \curvearrowright_\beta Y$ 是拓扑自由且连续轨道等价的。结合注 4 和文献[9]的定理 4.5，ρ 是一个群同构。证毕。

由命题 2 和命题 3，可得以下结果。

定理 1 令 G 是一个顺从的无挠群，$G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_\beta (Y, \mathscr{S})$ 是两个本质自由的系统，假设 $G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_\beta (Y, \mathscr{S})$ 是连续强轨道等价的。如果 $G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 是连续 H-cocycle 刚性的，那么 $G \curvearrowright_\alpha (X, \mathscr{R})$ 和 $H \curvearrowright_\beta (Y, \mathscr{S})$ 是共轭的。

参考文献：

[1] MURRAY F J, VON NEUMANN J. On rings of operators[J]. Annals of Mathematics, 1936, 37(1):116-229.

[2] DYE H A. On groups of measure preserving transformations, I [J]. American Journal of Mathematics, 1959, 81(1):119-159.

[3] DYE H A. On groups of measure preserving transformations, II [J]. American Journal of Mathematics, 1963, 85(4):551-576.

[4] KRIEGER W. On ergodic flows and the isomorphism of factors[J]. Mathematische Annalen, 1976, 223(1):19-70.

[5] GIORDANO T, PUTNAM I F, SKAU C F. Topological orbit equivalence and C^*-crossed products[J]. Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, 1995, 469:51-111.

[6] TOMIYAMA J. Topological full groups and structure of normalizers in transformation group C^*-algebras[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1996, 173(2):571-583.

[7] MATSUMOTO K, MATUI H. Continuous orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras[J]. Kyoto Journal of Mathematics, 2014, 54(4):863-877.

[8] MATSUMOTO K. Asymptotic continuous orbit equivalence of Smale spaces and Ruelle algebras[J]. Canadian Journal of Mathematics, 2019, 71(5):1243-1296.

[9] LI X. Continuous orbit equivalence rigidity[J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2018, 38(4):1543-1563.

[10] CORDEIRO L G, BEUTER V. The dynamics of partial inverse semigroup actions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2020, 224(3):917-957.

[11] LI X. Partial transformation groupoids attached to graphs and semigroups[J]. International Mathematics Research Notices, 2017, 2017(17):5233-5259.

[12] 羌湘琦, 侯成军. 半群作用的共轭性[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2022, 48(3):89-94.
QIANG X Q, HOU C J. Conjugacy of semigroup actions[J]. Journal of Qufu Normal University (Natural Science), 2022, 48(3):89-94.

[13] YI I. Continuous orbit equivalences on self-similar groups [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2021, 58 (1):133-146.

[14] MATSUMOTO K. On one-sided topological conjugacy of topological Markov shifts and gauge actions on Cuntz-Krieger algebras[J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2022, 42(8):2575-2582.

[15] CARLSEN T M, EILERS S, ORTEGA E, et al. Flow equivalence and orbit equivalence for shifts of finite type and isomorphism of their groupoids[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 469(2):1088-1110.

[16] HOU C J, QIANG X Q. Asymptotic continuous orbit equivalence of expansive systems[J]. Studia Mathematica, 2021, 259(2):201-224.

[17] 羌湘琦. 拓扑动力系统的连续轨道等价与广群 C^*-代数理论[D]. 扬州:扬州大学, 2023.
QIANG X Q. Continuous orbit equivalence of topological dynamical systems and groupoid C^*-algebra theory[D]. Yangzhou:Yangzhou University, 2023. (in Chinese)

[18] RENAULT J. A groupoid approach to C^*-algebra[M]. Berlin:Springer-Verlag, 1980.

[19] BROWN J, CLARK L O, FARTHING C, et al. Simplicity of algebras associated to étale groupoids[J]. Semigroup Forum, 2014, 88(2):433-452.

[20] MITREA D, MITREA I, MITREA M, et al. Groupoid metrization theory[M]. Boston:Birkhäuser, 2013.

(责任编辑:张燕)